一個人の感想程度の解答です。計算ミス，タイプミス，ケアレスミスがたくさんあると思いますので参考程度に利用してください。それにしても，劣悪なセットですね。本文中の ➾注 は私の感想です。お気になさらずに次にお進みください。

2026 年度 共通テスト数学 2，数学 B，数学 C の解答例

数学 II，数学 B，数学 C

第 1 問

(1) $C_1 : x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0$

$x^2+y^2-7y+2x-5y+25=0$

$x^2+2x+y^2-12y=-25$

$x^2+2x+1^2+y^2-12y+(-6)^2=-25+1^2+(-6)^2$

$(x+1)^2+(y-6)^2=-25+1+36$

$(x+1)^2+(y-6)^2=12$

したがって，C_1 の中心の座標は

$$(\mathbf{-1},\ \mathbf{6}) \cdots\cdots (\boxed{\text{アイ}}, \boxed{\text{ウ}})$$

である。また，C_1 の半径 r_1 は

$$r_1=\sqrt{12}=\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{3}} \cdots\cdots \boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

$C_2 : x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0$

$x^2+y^2-7y-2x+5y-25=0$

$x^2-2x+y^2-2y=25$

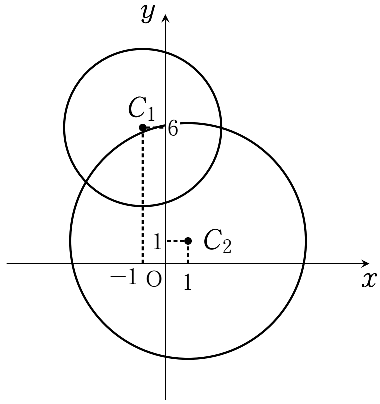
$x^2-2x+(-1)^2+y^2-2y+(-1)^2=25+(-1)^2+(-1)^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=25+1+1$

$(x-1)^2+(y-1)^2=27$

よって，C_2 の中心の座標は $(1,\ 1)$，半径 r_2 は

$$r_2=\sqrt{27}=\mathbf{3}\sqrt{\mathbf{3}} \cdots\cdots \boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$$



中心の間の距離 d は

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{\{1-(-1)\}^2+(1-6)^2} \\ &= \sqrt{2^2+(-5)^2} \\ &= \sqrt{4+25} \\ &= \sqrt{\mathbf{29}} \cdots\cdots \boxed{\text{クケ}} \end{aligned}$$

$r_1+r_2=2\sqrt{3}+3\sqrt{3}=5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}>\sqrt{29}$

したがって，$r_1+r_2>d$ が成り立つことから，C_1 と C_2 は 2 点で交わることがわかる。

(2) $x^2+y^2-7y+|2x-5y+25|<0 \cdots\cdots ③$

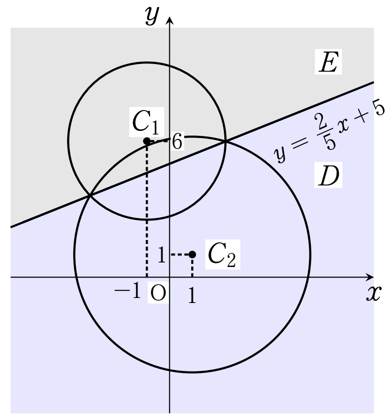
$2x-5y+25 \geqq 0$ のとき

③ $\Longleftrightarrow x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)=0 \cdots\cdots ①$

$2x-5y+25<0$ のとき

③ $\Longleftrightarrow x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)=0 \cdots\cdots ②$

(i) $2x-5y+25 \geqq 0 \Longleftrightarrow y \leqq \dfrac{2}{5}x+5$（下側）の表す領域を D，$2x-5y+25<0 \Longleftrightarrow y>\dfrac{2}{5}x+5$（上側）の表す領域を E とする。D, E を図示すると次の通りである。ただし，直線 $2x-5y+25=0$ 上の点は領域 D に含まれる。



したがって，

- 原点 O は $\boldsymbol{D}$ に含まれる。 $\boxed{\text{コ}}$ … ⓪
- C_1の中心は $\boldsymbol{E}$ に含まれる。 $\boxed{\text{サ}}$ … ①
- C_2の中心は $\boldsymbol{D}$ に含まれる。 $\boxed{\text{シ}}$ … ⓪

(ii) 方程式

$$2x-5y+25=0 \cdots\cdots ④$$

の表す直線を ℓ とする。

④，② 左辺どうし，右辺どうしの差をとると

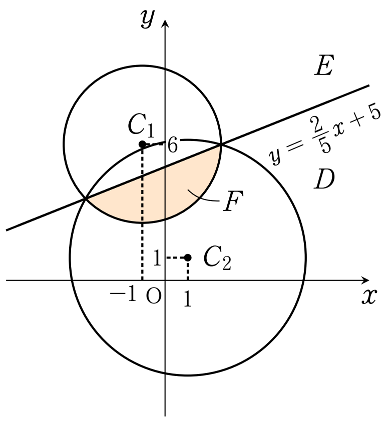
$$2(2x-5y+25)=0$$

したがって，①，② を満たす実数 x, y は ④ も満たす。ということは，2 つの円 C_1, C_2 の交点 $(x,\ y)$ は直線 ℓ 上にもあることを意味する。

ゆえに，$\boxed{\text{ス}}$ は **②**

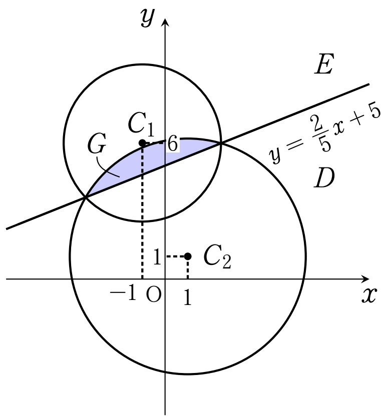
(iii) $x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$

の表す領域と (i) の領域 D の共通部分を F とするとき，F は次の図の網目部分（オレンジ）である。



$$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$$

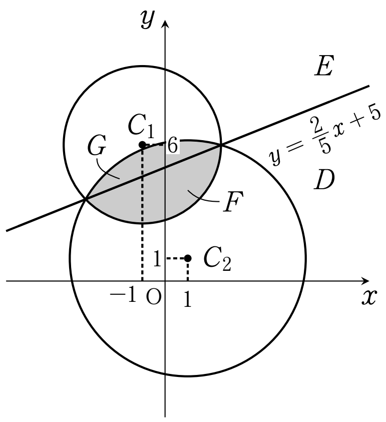
の表す領域と (i) の領域 E の共通部分を G とするとき，G は次の図の網目部分（青）である。



よって，不等式

$$x^2+y^2-7y+|2x-5y+25|<0 \cdots\cdots ③$$

の表す領域は F と G の和集合である。これを図示すると次の図の灰色部分である。ただし，境界線は含まない。



よって，$\boxed{\text{ソ}}$ は ⓪

(iv) ［まだ続くのですね。何ですか，このネチネチは。］

$$x^2+y^2-7y+|2x-5y+25|<0 \cdots\cdots ⑤$$

- $2x-5y+25 \geqq 0 \cdots\cdots ⑥$ のとき

$$x^2+y^2-7y+(2x-5y+25)<0$$

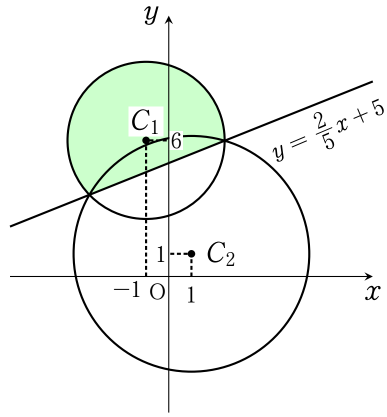
$x^2+2x+y^2-12y+25<0$

$x^2+2x+1^2+y^2-12y+(-6)^2<-25+1^2+(-6)^2$

$(x+1)^2+(y-6)^2<-25+1+36$

$(x+1)^2+(y-6)^2<12 \cdots\cdots ⑦$

⑦ は中心 $(-1,\ 6)$，半径 $2\sqrt{3}$ の円の内部を表す。よって，⑥ かつ ⑦ の表す領域は次の図の緑色の部分である。ただし，境界線は直線 $2x-5y+25=0$ 上の点のみを含む。



- $2x-5y+25<0 \cdots\cdots ⑧$ のとき

$x^2+y^2-7y-(2x-5y+25)<0$

$x^2-2x+y^2-2y-25<0$

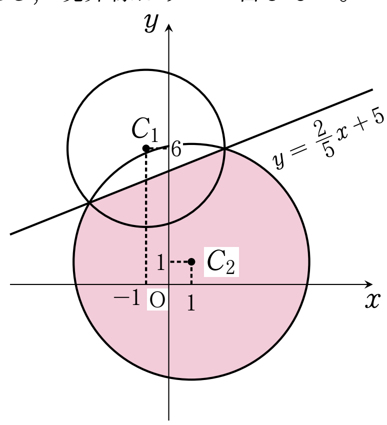
$x^2-2x+(-1)^2+y^2-2y+(-1)^2$

$\qquad <25+(-1)^2+(-1)^2$

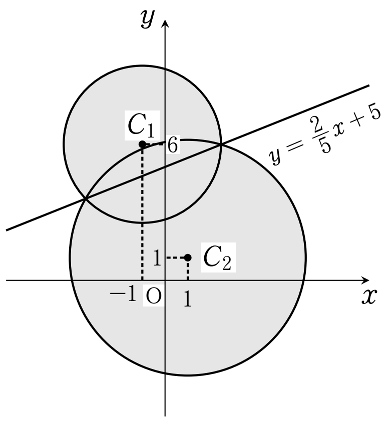
$(x-1)^2+(y-1)^2<25+1+1$

$(x-1)^2+(y-1)^2<27 \cdots\cdots ⑨$

⑨ は中心 $(1,\ 1)$，半径 $3\sqrt{3}$ の円の内部を表す。よって，⑧ かつ ⑨ の表す領域は次の図の紫色の部分である。ただし，境界線はすべて含まない。



したがって，不等式 ⑤ の表す領域は上の緑色の部分と紫色の部分の和集合であるから，次の図の灰色部分になる。



したがって，$\boxed{ソ}$ は ④

第 2 問

(1)［和→積の証明です。できますでしょうか？ ］

加法定理から

$\sin(\alpha+\beta)=\boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta}+\cos\alpha\sin\beta$ …… ②

$\sin(\alpha-\beta)=\boldsymbol{\sin\alpha\cos\beta}-\cos\alpha\sin\beta$ …… ③

よって，$\boxed{ア}$ は ①

②+③ を作ると

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

$$\alpha+\beta=A \cdots\cdots ④,\quad \alpha-\beta=B \cdots\cdots ⑤$$

とおく。

④+⑤ より　$2\alpha=A+B$

よって，　$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{A+B}{2}}$　$\boxed{イ}$ …… ④

④ − ⑤ より　$2\beta=A-B$

よって，　$\beta=\boldsymbol{\dfrac{A-B}{2}}$　$\boxed{ウ}$ …… ⑤

したがって，

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

(2)　$f(x)=\sin\left(x+\dfrac{5}{12}\pi\right)+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{12}\right)$

① で，$A=x+\dfrac{5}{12}\pi$，$B=x+\dfrac{\pi}{12}$　とすると

$$\begin{aligned}\frac{A+B}{2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)+\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{6}{12}\pi\right)\\&=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=x+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{A-B}{2}&=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{5}{12}\pi\right)-\left(x+\frac{\pi}{12}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{4}{12}\pi\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\\&=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x)&=2\sin\left(x+\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right)\cos\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\\&=2\cos\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\sin\left(x+\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right)\end{aligned}$$

よって，$\boxed{エ}$ …… ③，　$\boxed{オ}$ …… ②

ここで，$\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であり，$0\leqq x<2\pi$ のとき，

$$\frac{\pi}{6}\leqq x+\frac{\pi}{6}<2\pi+\frac{\pi}{6}$$

であるから

$f(x)$ は $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$ つまり $x=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6}=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ で最大値

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

をとる。

よって，$\boxed{カ}$ …… ③，　$\boxed{キ}$ …… ⑥

(3)　$g(x)=\sin(x+a)+\sin(x+2a)+\sin(x+3a)$

(i)　$\sin(x+a)+\sin(x+3a)$

$$\begin{aligned}&=2\sin\frac{(x+a)+(x+3a)}{2}\cdot\cos\frac{(x+a)-(x+3a)}{2}\\&=2\sin\frac{2x+4a}{2}\cdot\cos\frac{-2a}{2}\\&=2\sin(x+2a)\cdot\cos(-a)\\&=2\cos a\sin(x+2a)\end{aligned}$$

よって，$\boxed{ク}$ …… ①，　$\boxed{ケ}$ …… ①

したがって，関数 $g(x)$ は

$$\begin{aligned}g(x)&=2\cos a\sin(x+2a)+\sin(x+2a)\\&=\boldsymbol{(2\cos a+1)}\sin(x+2a)\end{aligned}$$

よって，$\boxed{コ}$ …… ④

(ii)　$a=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\begin{aligned}g(x)&=\left(2\cos\frac{5}{6}\pi+1\right)\sin\left(x+2\cdot\frac{5}{6}\pi\right)\\&=\left(2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1\right)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)\\&=\left(-\sqrt{3}+1\right)\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき，

$$\frac{5}{3}\pi\leqq x+\frac{5}{3}\pi<2\pi+\frac{5}{3}\pi$$

であるから，$g(x)$ は

$$x+\frac{5}{3}\pi=2\pi+\frac{3}{2}\pi$$

すなわち　$x=2\pi+\dfrac{3}{2}\pi-\dfrac{5}{3}\pi$

$$=\frac{12}{6}\pi+\frac{9}{6}\pi-\frac{10}{6}\pi$$

$$= \mathbf{\frac{11}{6}\pi}$$

で最大値

$$(1-\sqrt{3})\cdot(-1) = \sqrt{\mathbf{3}} - \mathbf{1}$$

をとる。

よって，$\boxed{\text{サシ}}$ … **11**，$\boxed{\text{ス}}$ … **6**，$\boxed{\text{セ}}$ … ⑧

第 3 問

(1)

(i)［微分して増減表を書きます。］

$f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + k$

x で微分すると

$f'(x) = \dfrac{1}{3}\cdot 3x^2 - 2\cdot 2x + 3$

$\quad = x^2 - 4x + 3$

$\quad = (x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ のとき $x = 1, 3$

したがって，増減表は次のとおり。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(1) = \dfrac{1}{3}\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + k$

$\quad = \dfrac{1}{3} - 2 + 3 + k$

$\quad = \dfrac{1}{3} + 1 + k$

$\quad = \dfrac{4}{3} + k$

$f(3) = \dfrac{1}{3}\cdot 3^3 - 2\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + k$

$\quad = 3^2 - 2\cdot 3^2 + 3^2 + k$

$\quad = k$

よって，

$x = \mathbf{1}$ のとき，$f(x)$ は極大値 $\mathbf{\dfrac{4}{3} + k}$ をとる。

$\boxed{\text{イ}}$ … **1**　$\boxed{\text{ウ}}$ … ⑨

$x = \mathbf{3}$ のとき，$f(x)$ は極小値 $\boldsymbol{k}$ をとる。

$\boxed{\text{エ}}$ … **3**　$\boxed{\text{オ}}$ … ⑤

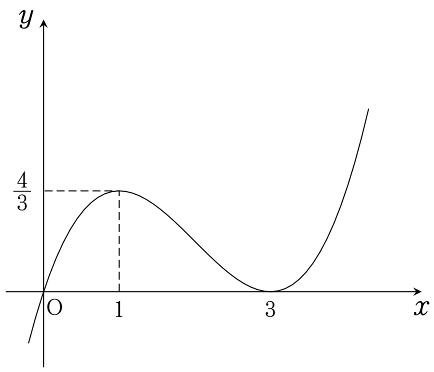
✎注 $f(x)$ を次のように変形すると計算が少し楽になります。

$f(x) = \dfrac{1}{3}x(x^2 - 6x + 9) + k$

$\quad = \dfrac{1}{3}x(x-3)^2 + k$

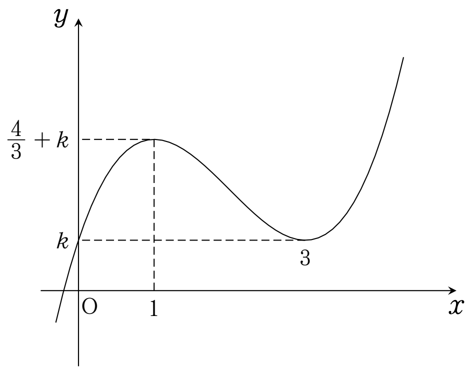
(ii) $y = f(x)$ のグラフの概形は，

• $k = 0$ のとき



よって，　$\boxed{\text{カ}}$ … ②

• $k > 0$ のとき



よって，　$\boxed{\text{キ}}$ … ⓪

(iii) $\alpha = 1$ とする。

$f(0) = k$

$f(\alpha) = f(1) = \dfrac{4}{3} + k$

であるから，

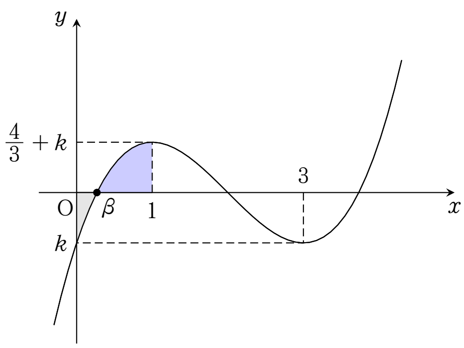
$f(0) < 0 < f(\alpha)$ のとき　$k < 0 < \dfrac{4}{3} + k$

よって，　$k < 0$ かつ $k > -\dfrac{4}{3}$

$$-\mathbf{\frac{4}{3}} < k < \mathbf{0}$$

よって，　$\boxed{\text{ク}}$ …… ⑧，　$\boxed{\text{ケ}}$ …… ⓪

$-\dfrac{4}{3} < k < 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフの概形は次の通り。



$0 \leqq x \leqq \beta$ における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分（灰色）の面積と，$\beta \leqq x \leqq 1$ の範囲における $y = f(x)$ のグラフと x 軸および直線

$x=1$ で囲まれた部分（青色）の面積が等しいとするとき

$$-\int_0^\beta f(x)dx=\int_\beta^1 f(x)dx$$

$$0=\int_\beta^1 f(x)dx+\int_0^\beta f(x)dx$$

両辺を入れ替え，さらに項の順序を入れ替えると

$$\int_0^\beta f(x)dx+\int_\beta^1 f(x)dx=0$$

よって　$\displaystyle\int_0^1 \boldsymbol{f(x)dx=0}$ $\boxed{\text{コ}}$ …… ①

上の定積分を実行すると

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx&=\int_0^1\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+k\right)dx\\&=\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}x^4-2\cdot\frac{1}{3}x^3+3\cdot\frac{1}{2}x^2+kx\right]_0^1\\&=\left[\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+3x^2+kx\right]_0^1\\&=\left(\frac{1}{12}\cdot1^4-\frac{2}{3}\cdot1^3+3\cdot\frac{1}{2}\cdot1^2+k\cdot1\right)-0\\&=\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+k\end{aligned}$$

この値が 0 に等しいから

$$\frac{1}{12}-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+k=0$$

両辺に 12 を掛けると

$$1-8+18+12k=0$$

$$12k=-1+8-18$$

$$12k=-11$$

$$k=\frac{\mathbf{-11}}{\mathbf{12}}\cdots\frac{\boxed{\text{サシス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

(2)［まだ続くのですね。］

- 3 次関数 $g(x)$ について，

　条件 (a)　　$g(0)=0$ かつ $g'(0)>0$

が成り立つとき，

$y=g(x)$ のグラフは，原点を通り，原点で引いた接線の傾きは正である。

したがって，

$\boxed{\text{タ}}$, $\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ は ①, ②, ④

である。

- 条件 (a) に，

　条件 (b)　$y=g'(x)$ のグラフは直線 $x=0$ を軸とする放物線である。

を加える。

$g'(x)=px^2+q$ (p, q は定数)

よって

$g(x)=p\cdot\dfrac{1}{3}x^3+qx+C$ (C は積分定数)

であり，条件 (a) で $g'(0)=0$ であったから $C=0$

よって，

$$\begin{aligned}g(x)&=p\cdot\frac{1}{3}x^3+qx\\&=\frac{1}{3}px\left(x^2+3\frac{3q}{p}\right)\end{aligned}$$

$g(x)=0$ をみたす x は

- $\dfrac{3q}{p}\geqq 0$ のとき $x=0$ …… ①

このとき，$y=g(x)$ のグラフと x 軸の共有点は原点のみ

- $\dfrac{3q}{p}<0$ のとき $x=0$ と 2 つの異符号の実数

このとき，$y=g(x)$ のグラフと x 軸の共有点は原点と $x<0$ の範囲に 2 つ

であるから，条件 (a)，条件 (b) をともに満たすのは関数 $y=g(x)$ のグラフの概形は

$\boxed{\text{テ}}$, $\boxed{\text{ト}}$ …… ①, ④

- 条件 (c)　$y=g'(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

を加える。すると，上の p は正であり，また $g'(0)=q>0$

よって，① より $y=g(x)$ のグラフは x 軸との共有点は原点以外にない。したがって，$y=g(x)$ のグラフの概形は

$\boxed{\text{ナ}}$ …… ④

である。

第 4 問

(1)

(i) $a_1=1,\ b_n=4n-1$ であるとする。

(i) $b_1=4\cdot1-1=\mathbf{3}$ …… $\boxed{\text{ア}}$

であるから，

$a_2=a_1+b_1=1+3=\mathbf{4}$ …… $\boxed{\text{イ}}$

さらに，

$b_2=4\cdot2-1=\mathbf{7}$ …… $\boxed{\text{ウ}}$

であるから

$a_3=a_2+b_2=4+7=\mathbf{11}$ …… $\boxed{\text{エオ}}$

(ii) n を 2 以上の自然数とするとき

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{\boldsymbol{n-1}}b_k\ \cdots\cdots\ ①\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{カ}}\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k-1)\\&=1+4\sum_{k=1}^{n-1}k-\sum_{k=1}^{n-1}1\end{aligned}$$

$$= 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n - (n-1)$$
$$= 1 + 2n(n-1) - (n-1)$$
$$= 1 + 2n^2 - 2n - n + 1$$
$$= \boldsymbol{2n^2 - 3n + 2}$$

よって，　$\boxed{\text{キ}}$…**2**，$\boxed{\text{ク}}$…**3**，$\boxed{\text{ケ}}$…**2**

(2)［理系の人にはお馴染みの変形方法ですが，文系の人はちょっと手薄だったかも。「1 対 1 対応の演習 数学 B」(東京出版) の 16 ページ参照。］

一般項が

$$d_n = (2n+1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めよう。

数列 $\{c_n\}$ で，$\{c_n\}$ の階差数列が $\{d_n\}$ となるもの，すなわち

$(2n+1) \cdot 2^n = c_{n+1} - c_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ …… ②

となるものを見つけたい。

$c_n = (pn+q) \cdot 2^n$ (p, q は定数) とおくと

$$c_{n+1} - c_n = \{p(n+1)+q\} \cdot 2^{n+1} - (pn+q) \cdot 2^n$$
$$= 2^{n+1} \cdot (pn+p+q) - 2^n \cdot (pn+q)$$
$$= 2^n \cdot \{2(pn+p+q) - (pn+q)\}$$
$$= 2^n \cdot (2pn + 2p + 2q - pn - q)$$
$$= 2^n \cdot \{\boldsymbol{pn + (2p+q)}\}$$

よって，　$\boxed{\text{コ}}$ …… ⓪，$\boxed{\text{キ}}$ …… ⑤

この右辺 $= 2^n \cdot \{\boldsymbol{pn + (2p+q)}\}$ と $(2n+1) \cdot 2^n$ が同じになるように p, q を求めると

$$p = 2, \quad 2p + q = 1$$

よって，$p = \mathbf{2}$ …… $\boxed{\text{シ}}$，　$q = \mathbf{-3}$ …… $\boxed{\text{スセ}}$

以上から

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} (c_{n+1} - c_n)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (c_{k+1} - c_k)$$
$$= (c_2 - c_1) + (c_3 - c_2) + \cdots$$
$$+ (c_n - c_{n-1}) + (c_{n+1} - c_n) \quad \cdots\cdots (*)$$
$$= c_{n+1} - c_1$$
$$= \{2(n+1) - 3\} \cdot 2^{n+1} - (2 \cdot 1 - 3) \cdot 2^1$$
$$= (2n-1) \cdot 2^{n+1} - (2-3) \cdot 2$$
$$= \boldsymbol{(2n-1) \cdot 2^{n+1} + 2}$$

✎**注** (*) の計算は，次のように積み算をするとわかりやすい。

$$\begin{array}{l} (\cancel{c_2} - c_1) \\ + (\cancel{c_3} - \cancel{c_2}) \\ + (\cancel{c_4} - \cancel{c_3}) \\ + (\cancel{c_5} - \cancel{c_4}) \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ + (\cancel{c_n} - \cancel{c_{n-1}}) \\ + (c_{n+1} - \cancel{c_n}) \\ \hline = c_{n+1} - c_1 \end{array}$$

(3)［ヒエ〜，まだ続くのですね。やれやれ。］

一般項が

$$d_n = (n^2 - n - 1) \cdot 2^n$$

で表される数列 $\{d_n\}$ の和を求めよ。

(2) にならって，

$$d_n = (n^2 - n - 1) \cdot 2^n = e_{n+1} - e_n$$

となる数列 e_n を考えよう。

$e_n = (an^2 + bn + c) \cdot 2^n$ (a, b, c は定数)

（これは自分でひねり出します。）

とすると

$$e_{n+1} - e_n = \{a(n+1)^2 + b(n+1) + c\} \cdot 2^{n+1}$$
$$- (an^2 + bn + c) \cdot 2^n$$
$$= \{a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c\} \cdot 2^{n+1}$$
$$- (an^2 + bn + c) \cdot 2^n$$
$$= \{an^2 + (2a+b)n + a + b + c)\} \cdot 2^{n+1}$$
$$- (an^2 + bn + c) \cdot 2^n$$
$$= 2^n\{2an^2 + (4a+2b)n + 2a + 2b + 2c\}$$
$$- (an^2 + bn + c) \cdot 2^n$$
$$= 2^n\{2an^2 + (4a+2b)n + 2a + 2b + 2c$$
$$- (an^2 + bn + c)\}$$
$$= 2^n\{an^2 + (4a+b)n + 2a + 2b + c\}$$

これが $(a^2 - n - 1) \cdot 2^n$ と等しいことから，係数を比べて

$$a = 1,\ 4a + b = -1,\ 2a + 2b + c = -1$$

これを解いて

$$a = 1,\ b = -5,\ c = 7$$

よって　　$e_n = (n^2 - 5n + 7) \cdot 2^n$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} (e_{k+1} - e_k)$$
$$= (e_2 - e_1) + (e_3 - e_2) + \cdots$$
$$+ (e_n - e_{n-1}) + (e_{n+1} - e_n)$$

$= e_{n+1} - e_1$

$= \{(n+1)^2 - 5(n+1) + 7\} \cdot 2^{n+1}$

$\quad - (1^2 - 5 \cdot 1 + 7) \cdot 2^1$

$= \{(n^2 + 2n + 1) - 5(n+1) + 7\} \cdot 2^{n+1}$

$\quad - (1 - 5 + 7) \cdot 2$

$= (n^2 - 3n + 3) \cdot 2^{n+1} - 3 \cdot 2$

$= \boldsymbol{(n^2 - 3n + 3) \cdot 2^{n+1} - 6}$

したがって

$\boxed{\text{チ}}$ …… ⑦，$\boxed{\text{ツ}}$ …… **6**

第 5 問

(1) 今年の資格試験における受験者全体の得点の平均は 116 点，標準偏差は 25 点であり，今年の資格試験の受験者の得点は正規分布に従う。得点を表す確率変数を X とすると，X は正規分布 $N(116, 25^2)$ に従うとし，$Y = \boldsymbol{\dfrac{X - 116}{25}}$ $\boxed{\text{ア}}$ …… ① とおくと，Y は標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。

> **標準正規分布**
>
> 確率変数 X が正規分布 $\boldsymbol{N(m, \sigma^2)}$ に従うとき，
>
> $$\boldsymbol{Z = \frac{X - m}{\sigma}}$$
>
> とおくと，確率変数 Z は標準正規分布 $\boldsymbol{N(0, 1)}$ に従う。

したがって，今年の受験者全体のうち，120 点以上である科受験者の割合 $P(X \geqq 120)$ を求めよう。

$X = 120$ のとき $Y = \dfrac{120 - 116}{25} = \dfrac{4}{25} = 0.16$

したがって，

$P(X \geqq 120) = P(Y \geqq 0.16)$

$= 0.5 - p(0.16)$

$= 5 - 0.0636$

$= 0.4364$

$\fallingdotseq \mathbf{0.44}$ $\boxed{\text{イ}}$ …… ⑤

(2) (i)

表 1

W_i	0	1	計
確率	$1 - p$	p	1

表 1 から，W_i の平均（期待値）$E(W_i)$ は

$E(W_i) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = \boldsymbol{p}$ …… $\boxed{\text{ウ}}$ ⓪

となる。

また，W_i の分散 $V(W_i)$ について

$V(W_i) = \{0 - E(W_i)\}^2(1 - p) + \{1 - E(W_i)\}^2 p$

$= (0 - p)^2(1 - p) + (1 - p)^2 p$

$= p^2(1 - p) + (1 - p)^2 p$

$= p^2 - p^3 + (1 - 2p + p^2)p$

$= p^2 - p^3 + p - 2p^2 + p^3$

$= p - p^2$

$= \boldsymbol{p(1 - p)}$ …… $\boxed{\text{エ}}$ ③

となる。

(ii) (i) の $W_1, W_2, \cdots, W_n$ を，表 1 の確率分布をもつ母集団から抽出した大きさ n の無作為標本とみなす。このとき，標本平均を $\overline{W} = \dfrac{W_1 + W_2 + \cdots + W_n}{n}$ とおくと，n が十分に大きいとき，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p, \boldsymbol{\dfrac{p(1 - p)}{n}}\right)$ …… $\boxed{\text{オ}}$ ⑦ に従う。

> **標本平均の分布**
>
> 母平均 m(ここでは p)，母標準偏差 σ(ここでは $\sqrt{p(1 - p)}$) の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，標本平均 $\overline{X}$(ここでは $\overline{W}$) は，n が大きいとき，近似的に正規分布 $N\left(m, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従うとみなすことができる。

この $\overline{W}$ の確率分布を利用して，p が 0.4 より高いといえるかを，有意水準 5%(0.05) で仮説検定を行い検証したい。ここで，統計的に検証したい仮説を「対立仮説」，対立仮説に反する仮定として設けた仮説を「帰無仮説」とする。このとき，帰無仮説は「$p = 0.4$」，対立仮説は「$p > 0.4$」である。これらの仮説に対して，有意水準 5% で帰無仮説が棄却（否定）されるかどうかを判断する。

無作為に選ばれた 400 人のうち，184 人が合格者であった。

✐注 合格者が 184 人という数字は検定の最後で使う。

いま，帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ $n = 400$ は十分に大きいので，標本平均 $\overline{W}$ は近似的に平均が 0.4，標準偏差が $\sqrt{\dfrac{p(1 - p)}{n}}$ の正規分布に従う。ここで，

$$\sqrt{\frac{p(1 - p)}{n}} = \frac{\sqrt{0.4 \times (1 - 0.4)}}{\sqrt{400}}$$

$$=\frac{\sqrt{0.4\times0.6}}{20}$$
$$=\frac{\sqrt{0.24}}{20}$$
$$=\frac{\sqrt{24\times10^{-2}}}{20}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}\times10^{-1}}{20}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{10\times10}$$
$$=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{100}}\ \cdots\cdots\ \boxed{カ}\ ②$$

$\sqrt{6}=2.45$ として用いると

$$Z=\frac{\overline{W}-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{100}}$$

とおくと, Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

✏注　合格者が 184 人という数字はここで使う。

$$P\left(\overline{W}\geqq\frac{184}{400}\right)=P(\overline{W}\geqq0.46)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.46-0.4}{\frac{\sqrt{6}}{100}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.06}{\frac{\sqrt{6}}{100}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{6}{\sqrt{6}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{6\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{6\times\sqrt{6}}{6}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\sqrt{6}\right)$$
$$=P(Z\geqq2.45)$$
$$=0.5-p(2.45)$$
$$=0.5-0.4929$$
$$=\mathbf{0.0071}\ \cdots\cdots\ \boxed{キ}\ ②$$

となる。

よって，この値 0.0071 をパーセント表示した値 0.70% は有意水準 5% より**小さいから，帰無仮説は棄却されない。** $\boxed{ク}$ …… ①

したがって，有意水準 5% で A 地域における今年の資格試験の合格率は 0.4 より**高いと判断できる。**

$\boxed{ケ}$ …… ⓪

(3) A 地域における今年の資格検査の受験者の中から無作為に選ばれた 100 人のうち，46 人が合格者である場合を考える。

(2) の (ii) と同じ帰無仮説と対立仮説に対し，有意水準 5% で帰無仮説が棄却されるかどうかを調べる。標本の大きさ $n=100$ は十分に大きいから，(2) の (ii) と同様に，$\overline{W}$ は近似的に正規分布 $N\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$ に従う。帰無仮説が正しいと仮定する。ここでは, $p=0.4,\ R=\overline{W}=\frac{46}{100}$ である。このとき, $\sqrt{6}=2.45$ として用いると

$$P\left(\overline{W}\geqq\frac{46}{100}\right)=P(\overline{W}\geqq0.46)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.46-0.4}{\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{100}}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.06}{\sqrt{\frac{0.24}{100}}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.06}{\sqrt{\frac{24\times10^{-2}}{10^2}}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.06}{\frac{\sqrt{24}\times10^{-1}}{10^1}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{0.06}{\frac{2\sqrt{6}}{100}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{6}{2\sqrt{6}}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq\frac{2.45}{2}\right)$$
$$=P\left(Z\geqq1.225\right)$$
$$\fallingdotseq0.5-p(1.23)$$
$$=0.5-0.3907$$
$$\fallingdotseq0.109$$

よって，0.109 をパーセント表示した値 10.9% は有意水準 5% より**大きい。** …… $\boxed{コ}$ ①

したがって，有意水準 5% で帰無仮説は**棄却されない。**

…… $\boxed{サ}$ ①

第 6 問

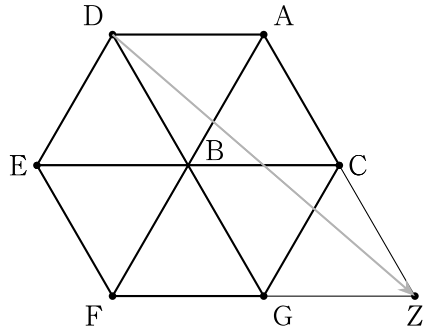
(1)［図は次ページです。］

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}=\overrightarrow{\mathrm{MA}}+2\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}\ \cdots\cdots\ ①$$

- M が A と一致するとき，① で M を A とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}}{-1+2}$$



よって，点 P は線分 BC を $1:2$ に外分する点である点 **E** $\boxed{ア}$ …… ④ と一致する。

✎注 $2\overrightarrow{AB}$, $-1\overrightarrow{AC}$ なので比の値は係数を入れ替えて **$1:2$** になります。

> **線分の内分点の位置ベクトル**
> 2 点 $\mathbf{A}(\vec{a}), \mathbf{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $\boldsymbol{m:n}$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は
> $$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$$

> **線分の外分点の位置ベクトル**
> 2 点 $\mathbf{A}(\vec{a}), \mathbf{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $\boldsymbol{m:n}$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は
> $$\vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$
> $\boldsymbol{m:n}$ のとき，数字の小さい方に $-$ をつけるとよい。実質，内分点の公式でいける。

- M が D と一致するとき，① で M を D とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

よって，点 P は点 **B** $\boxed{ア}$ …… ① と一致する。

✎注 手がつかなさそうですが，穴埋めなので，ぐっと図をにらんで $\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DZ}$ と考えて，さらに，$-\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ZB}$ を足すのでもいけます。

(2) $\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ …… ②

M がどの位置にあっても，② を満たす P の位置が変わらないための a, b, c の条件を調べよう。

② の左辺は

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{\mathbf{AP}} - \overrightarrow{\mathbf{AM}}$$ $\boxed{ウ}$ …… ②

となり，右辺は

$$\begin{aligned}&a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} \\ &= a(-\overrightarrow{AM}) + b(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + c(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) \\ &= \boldsymbol{b}\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{c}\overrightarrow{AC} + (\boldsymbol{-a-b-c})\overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

$\boxed{エ}$ …… ①，　$\boxed{オ}$ …… ②，　$\boxed{カ}$ …… ⑦

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} &= b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} + (-a-b-c)\overrightarrow{AM} \\ \overrightarrow{AP} &= \boldsymbol{b}\overrightarrow{AB} + \boldsymbol{c}\overrightarrow{AC} + (\boldsymbol{1-a-b-c})\overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

$\boxed{キ}$ …… ①，　$\boxed{ク}$ …… ②，　$\boxed{ケ}$ …… ⑨

M がどの位置にあっても，② を満たす P の位置が変わらないための必要十分条件は $\overrightarrow{AM}$ の 係数 $=0$ すなわち

$$1 - a - b - c = 0$$
$$\boldsymbol{a+b+c=1}$$ $\boxed{コ}$ …… ⑦

(3) $a+b+c=1$ のとき

$$\overrightarrow{MP} = a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$$ …… ②

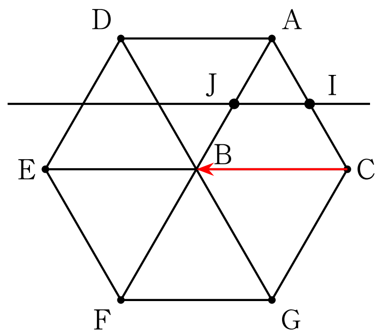
を満たす点 P が存在する範囲を調べよう。

(i) a, b, c が $a+b+c=1$ と $a = \frac{1}{2}$ を満たすとき，$c = \frac{1}{2} - b$ であり，② は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + \left(\frac{1}{2} - b\right)\overrightarrow{MC} \\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) + b\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)\end{aligned}$$

線分 AC の中点を I とすると，$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right) = \overrightarrow{MI}$ であるから

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MI} + b\overrightarrow{CB}$$



よって，P が存在する範囲は，点 I を通り，ベクトル $\overrightarrow{CB}$ に平行な直線である。線分 AB の中点を J とすると，**直線 IJ** である。$\boxed{サ}$ …… ④

> **位置ベクトル**
> 点 M を平面上の（任意の）点とするとき，M を始点とするベクトルを**位置ベクトル**と呼ぶ。

M はどこにあってもよいので，適当な場所に点 M をてっとグリグリしてもよい。(数学的には十分条件であるが解答には影響しない)

直線のベクトル方程式

点 $\mathbf{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{b}$ に平行な直線 $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$$

と表すことができる。

これらのベクトルは位置ベクトルなので始点は，O でも M でも，どこでもよい。

(ii) $a,\ b,\ c$ が $a+b+c=1$ かつ $c<0$ を満たすとき，$c=1-a-b<0 \Longleftrightarrow a+b>1$ であり，② は

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{MP}}&=a\overrightarrow{\mathrm{MA}}+b\overrightarrow{\mathrm{MB}}+(1-a-b)\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=a(\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}})+b(\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}})+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\\&=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{MC}}\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{MP}}-\overrightarrow{\mathrm{MC}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}\ \ (a+b>1)$$

よって，P が存在する範囲を図示すると ③ …… $\boxed{\text{シ}}$

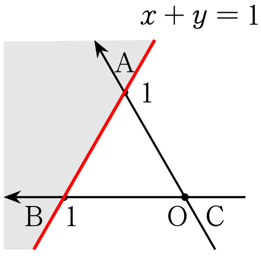
✎注　次の枠囲み記事を参照されたい。

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を満たす点 P の存在範囲

点 C を原点，点 P，点 A，点 B の座標をそれぞれ $(x,\ y)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ として平面座標で考えると，

$(x,\ y)=a(1,\ 0)+b(0,\ 1)=(a,\ b)$

よって，$\boldsymbol{x+y>1}$(灰色部分)が点 P が存在する範囲である。



ちょっと斜めってますが(これを斜交座標と言います)，点 C を原点，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ を x 軸，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を y 軸と考えると，直線 $x+y=1$ は 2 点 A，B を通る直線を表している。

なお，本格的にやるには(わからなければ，今はスキップしてよい)，$a+b=k$ とおき $\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k}=1$ として

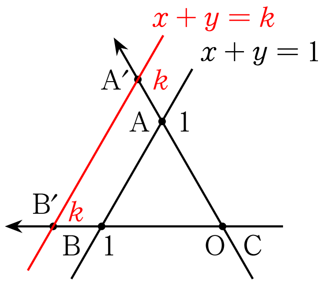
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{a}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{CA}})+\frac{b}{k}(k\overrightarrow{\mathrm{CB}})$$

$k\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{CA'}}$, $k\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{CB'}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{a}{k}\overrightarrow{\mathrm{CA'}}+\frac{b}{k}\overrightarrow{\mathrm{CB'}},\quad \frac{a}{k}+\frac{b}{k}=1$$

よって，$a,\ b$ はすべての実数をとり得るから，点 P は線分 A′B′ を $\dfrac{b}{k}:\dfrac{a}{k}$ に分ける任意の点，すなわち直線 $x+y=k$ 上を動く。

よって，k を $k>1$ の範囲で動かすと，点 P は上の図の灰色部分を動く。(直線 $x+y=1$ を左方向に平行移動する。)



第 7 問

$w=z+\dfrac{1}{z}\ \ (z\neq 0)$

(1) $z=\sqrt{3}+i$ のとき

$|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=\mathbf{2}$ …… $\boxed{\text{ア}}$

$$\begin{aligned}w&=z+\frac{1}{z}\\&=(\sqrt{3}+i)+\frac{1}{\sqrt{3}+i}\\&=(\sqrt{3}+i)+\frac{1\cdot(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}\\&=(\sqrt{3}+i)+\frac{\sqrt{3}-i}{(\sqrt{3})^2-i^2}\\&=(\sqrt{3}+i)+\frac{\sqrt{3}-i}{3-(-1)}\\&=(\sqrt{3}+i)+\frac{\sqrt{3}-i}{4}\\&=\frac{4\sqrt{3}}{4}+\frac{4i}{4}+\frac{\sqrt{3}-i}{4}\\&=\frac{\mathbf{5}\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{4}}+\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{i}\ \cdots\cdots\ \frac{\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}+\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}i\end{aligned}$$

複素数 $\alpha=a+bi$ に対し，

$$|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{bi}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2}$$

と定義する。

(2) $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とすると

(i)

$$\begin{aligned}w&=z+\frac{1}{z}\\&=r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{1}{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\\&=r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\end{aligned}$$

$$= r(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{r}\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$
$$= r(\cos\theta + \sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \left(\boldsymbol{r} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{i}\left(\boldsymbol{r} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\right)\mathbf{sin}\,\boldsymbol{\theta}$$

よって，$\boxed{キ}$ …… ⑥，$\boxed{ク}$ …… ⑨

ド・モアブルの定理
n が整数のとき
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta,\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$$

よって，θ の値によらず $\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta = 0$ が成り立つとき，
$\left(r - \frac{1}{r}\right) = 0$ であることが必要十分である。
よって，$r^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow r = \pm 1$
（極形式の場合）$r > 0$（と決まっている）であるから
$$\boldsymbol{r = 1} \cdots\cdots \boxed{ケ}$$

(ii) $r = 1$ とする。z が C 上を動くとき，
$$|z| = 1$$
が成り立つ。すると
$$|z|^2 = z\bar{z} = 1^2 = 1$$
したがって　　$z = \frac{1}{\bar{z}}$，$\frac{1}{z} = \bar{z}$

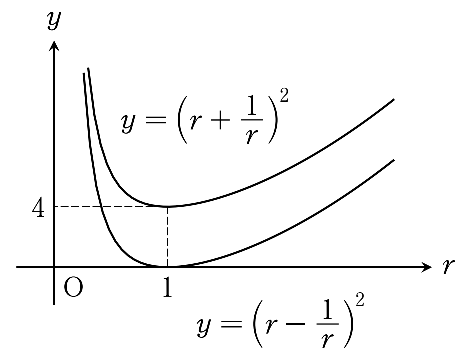
$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のとき
$$\bar{z} = r\{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$

よって
$$w = z + \frac{1}{z}$$
$$= z + \bar{z}$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta) + \{\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\}$$
$$= (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= 2\cos\theta$$
$$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1 \text{ より } -2 \leqq 2\cos\theta \leqq 2$$
したがって，w は**実軸上の 2 点 −2 と 2 を結ぶ線分を描く。** $\boxed{コ}$ …… ①

(iii) $r \neq 1$ とする。z が C 上を動くとき，
$$|z| = r$$
x，y を実数として $w = x + yi$ とおくと，① より
$$x = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta,\ y = \left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta \cdots\cdots ②$$

$r + \frac{1}{r} \neq 0$，$r - \frac{1}{r} \neq 0$ より，② 第 1 式，第 2 式をそれぞれ $r + \frac{1}{r}$，$r - \frac{1}{r}$ で割ると
$$\cos\theta = \frac{x}{r + \frac{1}{r}},\ \sin\theta = \frac{y}{r - \frac{1}{r}}$$
$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より
$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \left(\frac{x}{r + \frac{1}{r}}\right)^2 + \left(\frac{y}{r - \frac{1}{r}}\right)^2 = 1$$
$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\left(\boldsymbol{r} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\right)^2} + \frac{\boldsymbol{y}^2}{\left(\boldsymbol{r} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{r}}\right)^2} = \mathbf{1}$$
よって，$\boxed{サ}$ は ②

参考　$y = \left(r + \frac{1}{r}\right)^2$ と $y = \left(r - \frac{1}{r}\right)^2$ のグラフを描いてみました。



$r > 0$ のとき常に
$$\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 > \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \cdots\cdots \boxed{1}$$
であることがわかります。計算では，普通に展開してもよいが，因数分解してみると
$$\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 - \left(r - \frac{1}{r}\right)^2$$
$$= \left\{\left(r + \frac{1}{r}\right) + \left(r - \frac{1}{r}\right)\right\}\left\{\left(r + \frac{1}{r}\right) - \left(r - \frac{1}{r}\right)\right\}$$
$$= 2r \cdot \frac{2}{r} = 4 > 0$$
となって，$\boxed{1}$ が常に成り立つことがわかります。

なお，普通に展開すると
$$\left(r^2 + 2r \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \left(r^2 - 2r \cdot \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right)$$
$$= \left(r^2 + 2 + \frac{1}{r^2}\right) - \left(r^2 - 2 + \frac{1}{r^2}\right) = 4$$

(3) $r \neq 1$ のとき，z が C 上を動くとき，w^2 が描く図形を考えよう。

(i) $w^2 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 = \boldsymbol{z^2 + 2 + \frac{1}{z^2}}$ …… $\boxed{シ}$ ③

(ii) z が C 上を動くとき，$z^2 + \frac{1}{z^2}$ が描く図形の方程式を

考える。

まず，$|z|=r$ より　$|z|^2=r^2$

よって，z^2 は原点Oを中心とする半径 r^2 の円を描く。

$z^2+\dfrac{1}{z^2}=X+Yi$ とおくと，②で x, y を X, Y に，r を r^2 で置き換えて

$$X=\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos\theta,\ Y=\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin\theta$$

(2)(iii)と同様にして

$$\boldsymbol{\frac{X^2}{\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}+\frac{Y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1} \cdots\cdots \boxed{ス}\ ②$$

このとき，常に，

$$\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)^2>\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2>0$$

が成り立つから，XY 平面上で，② は横長の楕円である。したがって，w^2 が描く図形は，② の図形を実軸方向に2だけ平行移動したものである。中心は点2であるから，③ か ⑤ のいずれかであるが，

②で $X=0$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{Y^2}{\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2}=1 &\iff Y^2=\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2\\ &\iff Y^2=\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)^2\\ &\iff Y=\pm\left|r^2-\frac{1}{r^2}\right|\end{aligned}$$

$r^2>0, r^2\fallingdotseq 1$ のとき，$r^2-\dfrac{1}{r^2}\fallingdotseq 0$ であるから，② は虚軸上の異なる2点 $\left|r^2-\dfrac{1}{r^2}\right|, -\left|r^2-\dfrac{1}{r^2}\right|$ で交わることがわかる。

以上から，$\boxed{セ}$ は ③

感想　いやはや，精も根も尽き果てるセットです。受験生の皆さんが2日間朝から晩までこんな問題と格闘しているかと思うと尊敬の念を禁じ得ません。素晴らしいです。数学をこんな風にしてしまったのは大人の責任です。自分が無力であることはわかっているのですが，世の中のすべての大人にかわってお詫び申し上げたい。一問一問とりあげてどうのこうの言うレベルではありません。自分で考える力をすべて奪って，ボスの言うとおりに働けと言わんばかりの出題には怒りの気持ちしかありません。数学とは，こんなにまで窮屈なものだったのでしょうか？ 影響力をもった世の中の数学者の方，声を上げていただけないでしょうか。

（以上）

ブラウザの×で戻ってください。