一個人の感想程度の解答です。計算ミス，タイプミス，ケアレスミスがたくさんあると思いますので参考程度に利用してください。それにしても，劣悪なセットですね。本文中の ✎注 は私の感想です。お気になさらずに次にお進みください。

2025 年度 共通テスト数学 2， 数学 B， 数学 C の解答例

数学 II，数学 B，数学 C

第 1 問

[1]

(1)

(i) $\alpha = \beta$ のとき　$\theta + \dfrac{\pi}{6} = 2\theta$

よって　$-\theta = -\dfrac{\pi}{6}$

したがって　$\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}}$

このとき

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\frac{2\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}\end{aligned}$$

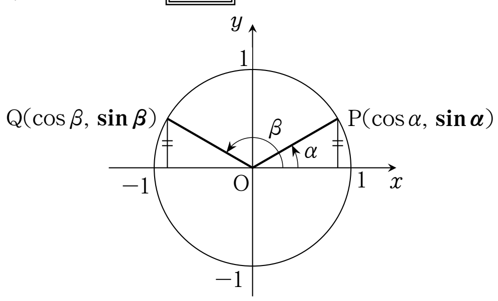
✎注

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \sin\frac{2\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}\\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdots\cdots \frac{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}\end{aligned}$$

としてもよい。

(ii) $\sin\alpha = \sin\beta$ ⋯⋯ ② が成り立つとき

$\sin\alpha$ は点 P の y 座標に等しく，$\sin\beta$ は点 Q の y 座標に等しいから　$\boxed{\text{エ}}$ ⋯ **②**



(iii) $\theta \neq \dfrac{\pi}{6}$ とする。

- $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の場合，上の図で考えればよい。
$\beta = \pi - \alpha$　であるから　$\alpha + \beta = \boldsymbol{\pi}$ ⋯ $\boxed{\text{オ}}$ **②**

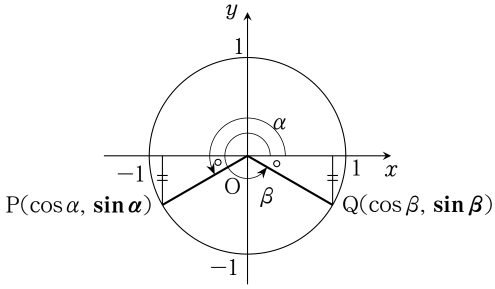
これより

$$\alpha + \beta = \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = \pi$$

よって

$$\begin{aligned}3\theta &= \pi - \frac{\pi}{6}\\ 3\theta &= \frac{5}{6}\pi\\ \theta &= \boldsymbol{\frac{5}{18}}\pi \cdots\cdots \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キク}}}\end{aligned}$$

- $\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ の場合，$\pi < \beta < 2\pi$ であるから次の図で考えればよい。



∘ の角は等しいから　$\alpha - \pi = 2\pi - \beta$

が成り立つ。よって　$\alpha + \beta = \boldsymbol{3\pi}$ ⋯ $\boxed{\text{ケ}}$ **⑥**

ゆえに

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) + 2\theta = 3\pi\\ 3\theta &= 3\pi - \frac{\pi}{6}\\ 3\theta &= \frac{18}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{17}{6}\pi\\ \theta &= \boldsymbol{\frac{17}{18}\pi} \cdots\cdots \frac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}\end{aligned}$$

以上より，① の解は

$$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{18}\pi,\ \frac{17}{18}\pi$$

(2)［同じことを $\cos\theta$ でやらせるとは鬼のような出題者です。ここでは簡単に解く。］

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2\theta$$

(i) $\theta + \dfrac{\pi}{6} = 2\theta + 2n\pi$（$n$ は整数）のとき

$$\begin{aligned}-\theta &= -\frac{\pi}{6} + 2n\pi\\ \theta &= \frac{\pi}{6} + 2n\pi\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < \pi$ であるから

$$0 < \frac{\pi}{6} + 2n\pi < \pi$$

π で割って

$$0 < \frac{1}{6} + 2n < 1$$

これを満たす整数 n は　$n = 0$ のみ。

よって　$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(ii) $\theta + \dfrac{\pi}{6} = -2\theta + 2n\pi$（$n$ は整数）のとき

$$\begin{aligned}3\theta &= 2n\pi - \frac{\pi}{6}\\ \theta &= \frac{2}{3}n\pi - \frac{\pi}{18}\end{aligned}$$

$0 \leqq \theta < \pi$ であるから

$$0 < \frac{2}{3}n\pi - \frac{\pi}{18} < \pi$$

π で割って

$$0 < \frac{2}{3}n - \frac{1}{18} < 1$$

両辺に 18 を掛けると

$$0 < 12n - 1 < 18$$

これを満たす整数 n は　$n = 1$ のみ。

よって　$\theta = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{18}$

$= \frac{12}{18}\pi - \frac{\pi}{18} = \frac{11}{18}\pi$

(i), (ii) より　$\theta = \boldsymbol{\frac{\pi}{6}\pi,\ \frac{11}{18}\pi}$　$\frac{\pi}{\boxed{セ}}$, $\frac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チツ}}\pi$

$\cos A = \cos B$ がなりたつとき

[1] $A = B + 2n\pi$ (n は整数)

または

[2] $A = -B + 2n\pi$ (n は整数)

まとめて　**$A = 2n\pi \pm B$ (n は整数)**

第 2 問

(1) 3 日目の水草 A の量は 0 日目の量の 0.32 倍になると考えられるから，r は

$$\boldsymbol{r^3} = 1.32 \quad \boxed{ア} \cdots ③$$

$\log_{10} 1.32 = \mathbf{0.1206}$　$\boxed{イ} \cdots ①$　であるから

$$\log_{10} r^3 = \log_{10} 1.32$$

$$3\log_{10} r = 0.1206$$

$$\log_{10} r = \mathbf{0.0402} \quad \boxed{ウエオカ}$$

(2) 14 日目の正午に水草 A の量は a の

$$\boldsymbol{r^{14}} \text{ 倍} \quad \boxed{キ} \cdots ③$$

になるので

$$a \times r^{14} = \mathbf{60} \cdots \boxed{クケ} \cdots\cdots ①$$

が成り立つ。

① の両辺の常用対数をとり，(1) で求めた

$$\log_{10} r = 0.0402$$

と

$$\log_{10} 6 = 0.7782$$

であることを用いると，

$$\log_{10} a = \mathbf{1.2154} \cdots \boxed{コ}$$

になる。

$$\log_{10} a = 1 + 0.2154$$

であり，常用対数表から

$$0.2154 \fallingdotseq \log_{10} 1.64$$

より

$$\log_{10} a \fallingdotseq \log_{10} 10 + \log_{10} 1.64$$

$$= \log_{10} 10 \times 1.64$$

$$= \log_{10} 16.4$$

よって a 以下で最大の整数は **16** $\cdots \boxed{サシ}$　である。

($0.2154 = \log_{10} 1.65$ としても，a 以下で最大の整数は 16 になるので，これでよい。)

✎注　えらくあっさり終わってしまいました。こんなんでいいのでしょうか？ $10^{1.2154}$ を求める必要がありますが，$10^{1+0.2154} = 10^1 \times 10^{0.2154}$ ですので，$10^{0.2154}$ を常用対数表で見つける必要があります。見つけられたでしょうか？

第 3 問

(1) $F(x) = 2x^3 + 3x^2$ の場合を考える。

$$f(x) = F'(x) = \mathbf{6}x^2 + \mathbf{6}x$$

$\boxed{ア} \cdots \mathbf{6}$　$\boxed{イ} \cdots \mathbf{6}$

$f(x) = 6x(x+1)$ であるから，$f(x) = 0$ とすると

$$x = 0,\ -1$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

上の増減表から，$F(x)$ は

$$x = \mathbf{-1} \cdots \boxed{ウエ}$$

で極大値をとる。

また　$G(x) = \mathbf{2}x^3 + \mathbf{3}x^2 + C$ (C は積分定数)

$F(x)$ と $G(x)$ は定数部分が異なるだけであるから，同じ x の値で極小値をとる。したがって，$G(x)$ は

$$x = \mathbf{0} \cdots \boxed{キ}$$

で極小値をとる。

$G(x)$ は $x = k = -1$ で極大値 0 をとるから

$$G(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 + C = 0$$

$$-2 + 3 + C = 0$$

$$C = \mathbf{-1} \cdots \boxed{クケ}$$

(2) $k > 0$ の場合を考える。

$F(x)$ が $x = 0$ で極小値 0 をとるから

$$f(0) = F'(0) = \mathbf{0} \cdots \boxed{コ}$$

であり，$x = 0$ の前後で $f(x)$ の符号は

負から正に変わる $\cdots \boxed{サ} \cdots$ ⓪。

✎注　$x = 0$ で極小値をとるから，$x = 0$ まで減少 (→

負）して，$x=0$ から増加（→ 正）する。

$G(x)$ が $x=k$ で極大値をとるから

$f(k)=G'(k)=F'(k)=0$ … $\boxed{\text{シ}}$

$x=k$ の前後で $f(x)$ の符号は

正から負に変わる … $\boxed{\text{ス}}$ … ①。

$y=F(x)$ は $x=0$ で極小値 0 をとり，$x=k(>0)$ で極大値をとるから，そのグラフは

$\boxed{\text{セ}}$ … ③

(ii) すべての実数 x に対して

$$F(x)=\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{x}} f(t)dt \cdots\cdots ①$$

$\boxed{\text{ソ}}$ … ③　$\boxed{\text{タ}}$ … ⓪

が成り立つ。このことと (i) の考察［$F(x)$ は $x=0$ で極小値をとり $x=k$ で極大値をとる］により，$F(x)$ の極大値は

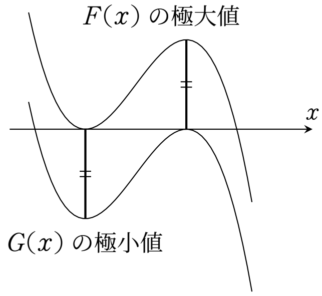
$F(k)$ であるから，上の ① で $x=k$ として

$$F(k)=\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{k}} f(t)dt \cdots\cdots ②$$

$\boxed{\text{チ}}$ … ②　$\boxed{\text{ツ}}$ … ⓪

と表され，$F(x)$ の極大値は，関数 $y=\boldsymbol{f(x)}$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の**面積**と等しいことがわかる。

$\boxed{\text{テ}}$ … ⓪　$\boxed{\text{ト}}$ … ⓪



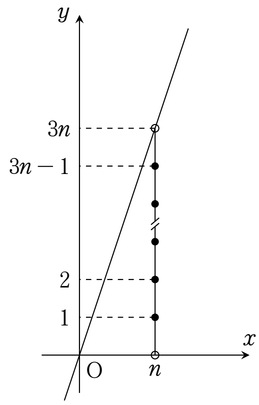
上のグラフから，$F(x)$ の極大値は，$G(x)$ の**極小値の -1 倍**と等しいことがわかる。

$\boxed{\text{ナ}}$ … ②

✎**注** (ii) では $f(x)=ax^2+bx+c$ とおいて本格的に解く方法もありますが，結果［グラフ］が分かっているから直感的に答えてよいでしょう。いや，時間を考えれば，そうするべきです。とゆうか，前年度に比べて鬼ほど簡単になっています。新課程初年度なので手探りなのでしょうか。これでも平均点は 60 点を割るようなので，十分にテストになっているということなのでしょうね。

第 4 問

(1)



(1) 上のグラフで $3n-1$ に $n=1, 2, 3, \cdots$ を代入して考えると，$a_1=2$,

$a_2=\mathbf{5}$ … $\boxed{\text{ア}}$,　$a_3=\mathbf{8}$ … $\boxed{\text{イ}}$

である。

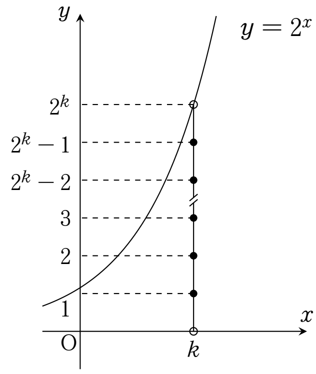
数列 $\{a_n\}$ は公差が 3 の等差数列である。

したがって，T の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{20}(3k-1)=\frac{1}{2}\cdot 20\cdot(2+59)$$
$$=10\times 61$$
$$=\mathbf{610}$$

［初項$=2$, 末項$=3\times20-1=59$, 項数$=20$ を用いた］

(2)



直線 $y=k$ 上の格子点で U の内部にあるものの個数は，上の図より $\mathbf{2^k-1}$ … $\boxed{\text{ケ}}$ ⑦ である。

したがって，U の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{\boldsymbol{n}}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=\mathbf{2^{n+1}-n-2}$$

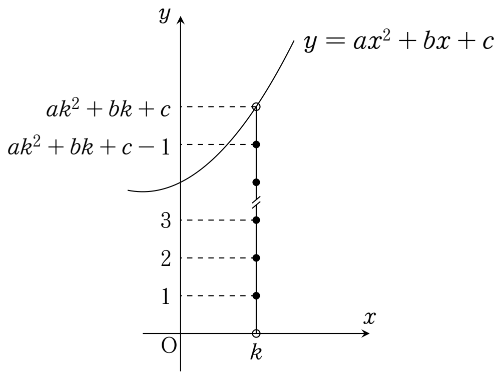
$\boxed{\text{コ}}$ ①　$\boxed{\text{サ}}$ ⑦

(3) 次ページのグラフより，V の内部にある格子点の個数は

$$\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+c-1)$$
$$=\frac{a}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{b}{2}n(n+1)+cn-n=n^3$$

これがすべての自然数 n に対して成り立つ。すなわち，

異なる 4 つの自然数に対しても成り立つ。



したがって

$$\frac{a}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{b}{2}n(n+1)+cn-n=n^3$$

はすべての実数 n について成り立つ恒等式である。

$n=-2,\ -1,\ 1$ を代入すると

・ $n=-2$ のとき

$$\frac{a}{6}\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot(-3)+\frac{b}{2}\cdot(-2)\cdot(-1)+(-2)c-(-2)=(-2)^3$$

$$-a+b-2c+2=-8$$

$$-a+b-2c=-10 \cdots\cdots ①$$

・ $n=-1$ のとき

$$\frac{a}{6}\cdot(-1)\cdot 0\cdot(-1)+\frac{b}{2}\cdot(-1)\cdot 0-c+1=(-1)^3$$

$$-c+1=-1$$

$$c=\mathbf{2} \cdots\cdots ②$$

・ $n=1$ のとき

$$\frac{a}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3+\frac{b}{2}\cdot 1\cdot 2+c-1=1^3$$

$$a+b+c-1=1$$

$$a+b+c=2 \cdots\cdots ③$$

② を ①，③ に代入すると

$$-a+b-4=-10 \cdots\cdots ④$$

$$a+b+2=2 \cdots\cdots ⑤$$

④ + ⑤ から

$$2b-2=-8$$

$$2b=-6$$

$$b=\mathbf{-3}$$

⑤ から　$a-3+2=2$

$$a=\mathbf{3}$$

以上から

$\boxed{\text{シ}}\cdots\mathbf{3}$　$\boxed{\text{スセ}}\cdots\mathbf{-3}$　$\boxed{\text{ソ}}\cdots\mathbf{2}$

注 (3) は自然数 n に対して常に成り立つ，ということは，(見かけ上の)2 次式が異なる 3 つの値に対して成り立つことを示しているから，結局，すべての実数 n に対して成り立つ。

一般に，

> x の n 次の整式 $f(x)$ が異なる $n+1$ 個の値に対して成り立つなら，$f(x)$ は恒等式ですべての実数 x について成り立つ。

従って，展開して係数比較をせずに，適当な数値を代入すればよいということ。

第 5 問

(1) X は正規分布 $(110,\ 20^2)$ にしたがうから，

$$Z=\frac{X-110}{20}$$

は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$X=110$ のとき　$Z=\dfrac{110-110}{20}=0$

$X=140$ のとき　$Z=\dfrac{140-110}{20}=1.5$

したがって

$$\begin{aligned}P(110\leqq X\leqq 140)&=P(0\leqq Z\leqq 1.5)\\&=p(1.5)\\&=0.\mathbf{4332}\cdots\boxed{\text{アイウエ}}\end{aligned}$$

Y は二項分布 $(200000,\ 0.4332)$ に従うから

Y の平均は　$200000\times 0.4332=\mathbf{86640}\cdots\boxed{\text{オ}}$ ④

(2) 標本平均 $\overline{W}=\dfrac{1}{n}(W_1+W_2+\cdots+W_1)$ は近似的に

正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)\cdots\boxed{\text{カ}}$ ⑥

に従う。また，m に対する信頼度 95% の信頼区間の幅は

$$\begin{aligned}B-A&=\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}-\frac{-1.96\sigma}{\sqrt{n}}\\&=\frac{\mathbf{3.92\sigma}}{\sqrt{n}}\cdots\boxed{\text{キ}}\ ⑤\end{aligned}$$

$\sigma=20$ として，n に関する不等式

$$\frac{3.92\times 20}{\sqrt{n}}\leqq 4 \cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 n を求めればよい。① の両辺は正であるから，両辺を 2 乗して

$$\left(\frac{1.96\times 2\times 20}{\sqrt{n}}\right)\leqq 4^2$$

$$\frac{1.96^2\times 40^2}{n}\leqq 16$$

$$1.96^2\times 40^2\leqq 16n$$

$$1.96^2\times 1600\leqq 16n$$

$$1.96^2\times 100\leqq n$$

$$(2-0.04)^2\times 100\leqq n$$

$$(4-0.16+0.0016)\times 100\leqq n$$

$$400-16+0.16 \leqq n$$

$$384.16 \leqq n$$

よって，① を満たす最小の自然数 n を n_0 とすると

$$n_0 = \mathbf{385} \cdots \boxed{\text{クケコ}}$$

(3) 帰無仮説は「$\boldsymbol{m < 110}$」 $\cdots \boxed{\text{サ}}$ ⓪

帰無仮説が正しいと仮定する。標本の大きさ 400 は十分に大きいので，(2) の標本平均 $\overline{W}$ は近似的に

正規分布 $N\left(110,\ \dfrac{20^2}{400}\right)$ つまり

$$\boldsymbol{N(110,\ 1)} \cdots \boxed{\text{サ}}\ ⑤$$

に従う。

$Z = \dfrac{\overline{W}-110}{1}$ は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

$\overline{W} = 108.2$ のとき $Z = 108.2-110 = -1.8$

よって

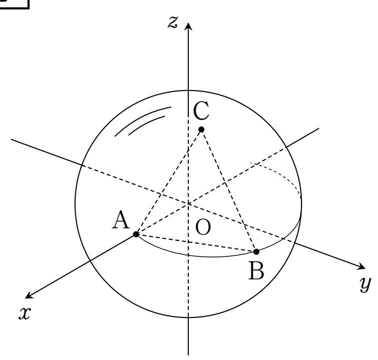
$$\begin{aligned} P(\overline{W} \leqq 108.2) &= P(Z \leqq -1.8) \\ &= 0.5 - p(1.8) \\ &= 0.5 - 0.4641 \\ &= 0.\mathbf{0359} \cdots \boxed{\text{スセソタ}} \end{aligned}$$

0.0359 をパーセント表示した値 3.59% は有意水準 5% より小さいから帰無仮説は棄却される。したがって，有意水準 5% で今年収穫されるレモンの重さの母平均は 110g より軽いと判断できる。

$\boxed{\text{チ}}$ ①　　$\boxed{\text{ツ}}$ ⓪

✎注　$m = 110$ とするとレモン 400 個の平均が 108.2g 以下になる確率は 3.59% で，判断基準の 5% より小さい。ということはめったに起こらないことが起こったと判断できるので，$m = 110$ とは判断できないということです。

第 6 問



(1) 点 $\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ が S 上にあるとき

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = \mathbf{1} \cdots \boxed{\text{ア}}$$

が成り立つ。これをベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の成分を用いて表すと

$$x^2+y^2+z^2 = 1 \cdots\cdots ①$$

$\triangle\mathrm{OAC} \equiv \triangle\mathrm{OAB}$(三辺相等) であるから，対応する角の大きさも等しい。

$$\angle\mathrm{AOC} = \angle\mathrm{AOB}$$

が成り立つ。

よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\angle\mathrm{AOC} \\ &= 1\cdot1\cdot\cos\angle\mathrm{AOC} \\ &= \cos\angle\mathrm{AOC} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB} \\ &= 1\cdot1\cdot\cos\angle\mathrm{AOB} \\ &= \cos\angle\mathrm{AOB} \end{aligned}$$

したがって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdots \boxed{\text{イ}}\ ④$$

が成り立つ。これをベクトルの成分を用いて表すと

$(1,\ 0,\ 0)\cdot(x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 0)\cdot(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0)$

$$x = \boldsymbol{a} \cdots \boxed{\text{ウ}}\ ⓪ \quad \cdots\cdots ②$$

同様に $\triangle\mathrm{OBC}$ と $\triangle\mathrm{OAB}$ も合同であるから

$$\angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{AOB}$$

が成り立つ。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

が成り立ち，これをベクトルの成分を用いて表すと

$(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0)\cdot(x,\ y,\ z) = (1,\ 0,\ 0)\cdot(a,\ \sqrt{1-a^2},\ 0)$

$$\boldsymbol{a}x + \sqrt{\boldsymbol{1-a^2}}\,y = a \quad \cdots\cdots ③$$

$\boxed{\text{エ}}$ ⓪　　$\boxed{\text{オ}}$ ⑤

(2)

(i) $a = \dfrac{3}{5}$ のとき，② と ③ を満たす実数 $x,\ y$ は

② より　$x = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}$

③ より　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{5} + \sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}\,y = \dfrac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\,y &= \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} \\ \sqrt{\frac{5^2-3^2}{5^2}}\,y &= \frac{15}{25} - \frac{9}{25} \\ \sqrt{\frac{16}{5^2}}\,y &= \frac{6}{25} \\ \frac{4}{5}y &= \frac{6}{25} \\ 20y &= 6 \\ y = \frac{6}{20} &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}} \cdots \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}} \end{aligned}$$

この $x,\ y$ に対して，① を満たす実数 z は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{10}\right)^2+z^2=1$$
$$\frac{9}{25}+\frac{9}{100}+z^2=1$$
$$\frac{9}{25}+\frac{9}{100}+z^2=136+9+100z^2 \quad =100$$
$$100z^2=100-45$$
$$z^2=\frac{55}{100}$$
$$z=\pm\sqrt{\frac{11}{20}}$$

であるから，ちょうど二つある。… $\boxed{\text{サ}}$ **②**

(iii)［まだしつこくやるみたいです。］

$a=-\frac{3}{5}$ のとき　$x=a=-\frac{3}{5}$

③ に代入すると

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}\,y=-\frac{3}{5}$$
$$\sqrt{\frac{5^2-3^2}{5^2}}\,y=-\frac{3}{5}-\frac{9}{25}$$
$$\sqrt{\frac{16}{5^2}}\,y=-\frac{24}{25}$$
$$\frac{4}{5}y=-\frac{24}{25}$$
$$20y=-24$$
$$y=-\frac{24}{20}=-\frac{6}{5}$$

この x, y に対して，① を満たす実数 z は

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2+z^2=1$$
$$\frac{9}{25}+\frac{36}{25}+z^2=1$$
$$9+36+25z^2=25$$
$$25z^2=25-45$$
$$z^2=-\frac{20}{25} \quad \cdots\cdots ④$$

であるから，ない … $\boxed{\text{シ}}$ **⓪** ことがわかる。

注 z は実数なので $z^2 \geqq 0$。よって ④ を満たす実数 z は存在しない。

(3) 実数 x, y, z は ①，②，③ を満たすとする。② から

$$x=a$$

③ から

$$a\cdot a+\sqrt{1-a^2}\,y=a$$
$$\sqrt{1-a^2}\,y=a-a^2$$
$$\sqrt{1-a^2}\,y=a(1-a)$$
$$y=\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}$$

このとき，① から

$$\begin{aligned}
z^2&=1-x^2-y^2\\
&=1-a^2-\left(\frac{a(1-a)}{\sqrt{1-a^2}}\right)^2\\
&=1-a^2-\frac{a^2(1-a)^2}{1-a^2}\\
&=1-a^2-\frac{a^2(1-a)^2}{(1-a)(1+a)}\\
&=(1-a)(1+a)-\frac{a^2(1-a)}{1+a}\\
&=(1-a)\left\{(1+a)-\frac{a^2}{1+a}\right\}\\
&=(1-a)\cdot\frac{(1+a)^2-a^2}{1+a}\\
&=(1-a)\cdot\frac{1+2a+a^2-a^2}{1+a}\\
&=(1-a)\cdot\frac{1+2a}{1+a}\\
&=\boldsymbol{\frac{(1+2a)(1-a)}{1+a}} \cdots \boxed{\text{ス}} \ ③
\end{aligned}$$

さらに，$z^2 \geqq 0$, $1+a>0$ であるから $\boxed{\text{ス}} \geqq 0$ である。

逆に，$\boxed{\text{ス}} \geqq 0$ のとき，①，②，③ を満たす実数 x, y, z があることがわかる。

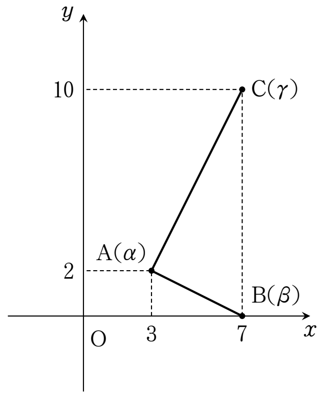
$\boxed{\text{ス}}=(1+2a)(1-a)\geqq 0$ を解いて

$$\boldsymbol{-\frac{1}{2}\leqq a<1} \cdots \boxed{\text{セ}} \ ④$$

したがって，$\boxed{\text{セ}}$ は △ABC が正三角形となる S 上の点 C があるための必要十分条件である。

注 問題冒頭で $-1<a<1$ と指定されているので，$\boxed{\text{セ}}$ では 1 に等号が入りません。

第 7 問



(1) $\alpha=3+2i$, $\beta=7$, $\gamma=7+10i$ の場合

$$\gamma-\alpha=(7+10i)-(3+2i)$$
$$=\boldsymbol{4+8i} \quad \boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\,i$$
$$\beta-\alpha=7-(3+2i)$$
$$=\boldsymbol{4-2i} \quad \boxed{\text{ウ}}+\boxed{\text{エ}}\,i$$

であるから

$$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\alpha}=\frac{4+8i}{4-2i}$$
$$=\frac{2+4i}{2-i}$$
$$=\frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$$
$$=\frac{4+2i+8i+4i^2}{4-i^2}$$
$$=\frac{4+10i+4\cdot(-1)}{4-(-1)}$$
$$=\frac{4+10i-4}{4+1}$$
$$=\frac{10i}{5}=\boldsymbol{2i}\cdots\boxed{\text{オ}}\ ③$$

よって，$\boxed{\text{オ}}$ の偏角は $\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\cdots\boxed{\text{オ}}$ ④

(3) ω の偏角が $\frac{\pi}{2}$ または $\frac{3}{2}\pi$ のとき，ω は純虚数（実部が 0 である虚数） $\cdots\boxed{\text{キ}}$ ②であるから

$\omega=ki$（k は実数）とおくと，$\overline{\omega}=-ki$

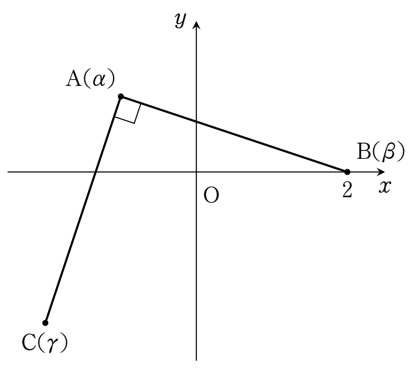
よって

$$\omega+\overline{\omega}=ki+(-ki)=\mathbf{0}\cdots\boxed{\text{ク}}\ ⓪$$

である。逆に，$\omega\neq 0$ に注意すると，$\omega+\overline{\omega}=0$ のとき，ω は純虚数であるので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わる。

(3)

(i) $\alpha=z,\ \beta=2,\ \gamma=\frac{4}{z}$ とする。直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための条件を考えよう。



$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{\frac{4}{z}-z}{2-z}=1+\frac{2}{z}\ \cdots\cdots ①$$

が成り立つので，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は

$$\left(1+\frac{2}{z}\right)+\overline{\left(1+\frac{2}{z}\right)}=\mathbf{0}$$

である。これは

$$2+\frac{2}{z}+\frac{2}{\overline{z}}=0$$

と変形できる。この両辺に $z\overline{z}$ をかけて整理すると

$$2z\overline{z}+\frac{2}{z}\cdot z\overline{z}+\frac{2}{\overline{z}}\cdot z\overline{z}=0$$
$$2z\overline{z}+2\overline{z}+2z=0$$
$$z\overline{z}+\overline{z}+z=0$$
$$\overline{z}(z+1)+(z+1)-1=0$$
$$(z+1)(\overline{z}+1)=1$$
$$(z+1)\overline{(z+1)}=1$$
$$|z+1|^2=1$$
$$\boldsymbol{|z+1|=1}$$

よって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるための必要十分条件は $\boldsymbol{|z+1|=1}\cdots\boxed{\text{ケ}}$ ⑥ であることがわかる。したがって，直線 AB と直線 AC が垂直に交わるような点 z 全体を複素平面上に図示すると $\cdots\boxed{\text{コ}}$ ⓪ である。

注 $|z+1|=1$ を満たす点 z は点 -1 を中心とする半径 1 の円を描く。ただし，条件より点 0，点 2，点 2 を除く。

(ii) (i) を参考にする。

$$\frac{\gamma'-\alpha'}{\beta'-\alpha'}=\frac{-\frac{4}{z}-(-z)}{-2-(-z)}=\frac{-\frac{4}{z}+z}{-2+z}=\frac{\frac{4}{z}-z}{2-z}$$

であるから，点 z 全体を複素数平面上に図示すると，(i) と同じく $|z+1|=1\cdots\boxed{\text{サ}}$ ⓪ である。

(iii)

$$\frac{\gamma''-\alpha''}{\beta''-\alpha''}=\frac{-\frac{4}{z}-(-z)}{2-(-z)}$$
$$=\frac{-\frac{4}{z}+z}{2+z}$$
$$=\frac{-4+z^2}{2z+z^2}$$
$$=\frac{(z+2)(z-2)}{z(z+2)}$$
$$=\frac{z-2}{z}$$
$$=1-\frac{2}{z}$$

これは (i) の ① で z の符号を変えたものだから，z は

$$|-z+1|=1\ \ すなわち\ \ |z-1|=1$$

を満たす。したがって，点 z 全体は中心が点 1，半径が 1 の円を描く。ただし，点 O，点 2 を除く。

よって $\cdots\boxed{\text{シ}}$ ① である。

（以上）

共通テスト過去問のページはこちら

外賀塾のトップページはこちら