第1問

[1] $A(-8,0)$

$D: x^2+y^2-4x-10y+4 \leqq 0$

$(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq -4+4+25$

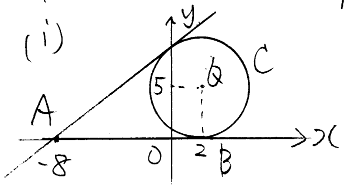
$(x-2)^2+(y-5)^2 \leqq 25=5^2$

(1) 中心 $(2,5)$, 半径が 5 の円の
$\boxed{ア},\boxed{イ}$　$\boxed{ウ}$

周および内部 ③ である.
$\boxed{エ}$

$A(2,5)$　$C: x^2+y^2-4x-10y+4=0$

(i)



左図から, x軸つまり 直線 $y=0$ $\boxed{オ}$ はCの接線の一つである.

(ii) 重解をもつとき $\boxed{カ}$ ⓪

(iii) 点$(2,0)$をBとすると

$\tan\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{5}{2-(-8)}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

直線 $y=0$ と異なる接線の傾きは

$\tan 2\theta$ と表すことができる.
$\boxed{ケ}$

(B以外の接点をDとすると,
$\angle BAQ=\angle DAQ (=\theta)$)

(iv) (iii)より

$k_0=\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{4-1}=\dfrac{4}{3}$　$\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$

②

また，$\boxed{シ}$ は $0 \leqq k \leqq k_0$ である

⑤

[2]

(1) $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ $\boxed{ス}$

$\log_9 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{\log_3 3^2} = \frac{1}{2\log_3 3} = \frac{1}{2}$

よって，$\log_3 9 > \log_9 3$

一方，$\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = (2^{-2})^{-\frac{3}{2}} = 2^{-2\times\left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^3 = 8$

よって，$\log_{\frac{1}{4}} 8 = -\frac{3}{2}$ $\boxed{セ}$，

$\log_8 \frac{1}{4} = \frac{\log_2 \frac{1}{4}}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^{-2}}{\log_2 2^3} = \frac{-2\log_2 2}{3\log_2 2}$

$= -\frac{2}{3}$

$-\frac{3}{2} < -\frac{2}{3}$ より $\log_{\frac{1}{4}} 8 < \log_8 \frac{1}{4}$

が成り立つ．

(2) $\log_a b = t$ とおく．

対数の定義から $a^t = b$ ① $\boxed{ソ}$

両辺を $\frac{1}{t}$ 乗すると

$(a^t)^{\frac{1}{t}} = b^{\frac{1}{t}}$

$a = b^{\frac{1}{t}}$ ① $\boxed{タ}$

よって，$\log_b a = \frac{1}{t}$

(3) $\log_a b > \log_b a$ が成り立つとき

$-1 < \log_a b < 0,\ 1 < \log_a b$

$\Leftrightarrow \log_a a^{-1} < \log_a b < \log_a 1,\ \log_a a < \log_a b$

(i) $a > 1$ のとき（不等号の向きはそのまま）

$a^{-1} < b < 1,\ a < b$

よって，$\frac{1}{a} < b < 1,\ a < b$ ③ $\boxed{チ}$

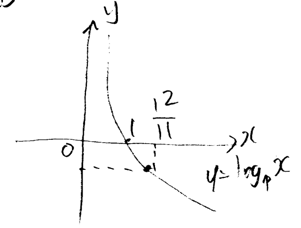
(ii) $0<a<1$ のとき(不等号の向きは逆)

$a^{-1} > b > 1,\ a > b$

よって、$1<b<\frac{1}{a},\ 0<b<a$ ツ 0

(4) これは直接計算した方が速いでしょう。

$$\log_p q - \log_q p = \log_p q - \frac{1}{\log_p q} = \frac{(\log_p q)^2-1}{\log_p q} \cdots ①$$



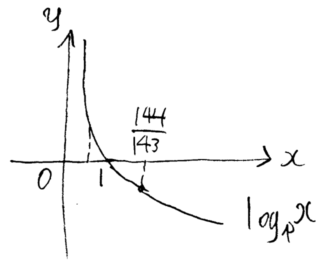
ここで、$p=\frac{12}{13}<1,\ q=\frac{12}{11}>1$ であるから

$\log_p q<0$

なぜなら、$\frac{12}{11}>1$ より

$\log_{\frac{12}{13}}\frac{12}{11} < \log_{\frac{12}{13}} 1 = 0$ (底 $\frac{12}{13}<1$ より不等号の向きが逆転)

よって、$\log_p q$ と -1 の大小を考えればよい。



$$\log_p q-(-1)=\log_p q+1=\log_p q+\log_p p$$
$$=\log_p pq$$

$$pq=\frac{12}{13}\cdot\frac{12}{11}=\frac{144}{143}>1$$

よって、$\log_p pq<\log_p 1=0$ (ここでも不等号の向きが逆)

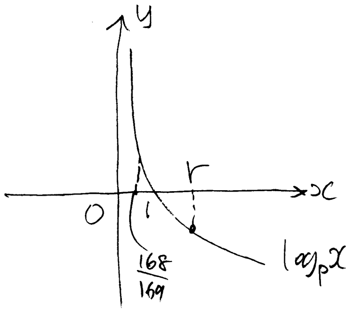
従って、$\log_p q<-1$

よって、$(\log_p q)^2>1$ より $\frac{(\log_p q)^2-1}{\log_p q}$ ←正 ←負

の符号は負

従って、$\log_p q<\log_q p$

$\log_p r$, $\log_r p$ も同様にする。



$$\log_p r-\log_r p=\frac{(\log_p r)^2-1}{\log_p r} \cdots ②$$

$p<1,\ r>1$ だから $\log_p r<0$

$\log_p r$ と -1 の大小を考えればよい

$$\log_p r-(-1)=\log_p r+1=\log_p r+\log_p p$$
$$=\log_p pr$$

ここで、$pr=\frac{12}{13}\cdot\frac{14}{13}=\frac{168}{169}<1$

よって，$\log_p pr>0$ より $\log_p r>-1$

$-1<\log_p r<0$ より $0<(\log_p r)^2<1$

ゆえに，$(\log_p r)^2-1<0$ であるから

②は正。よって，$\log_p r>\log_r p$

以上から $\boxed{テ}$ は ②

(※) 紙に書くと長くなるが，底が1より小さいことと，$pq>1$，$pr<1$ であることがわかれば5分程度で解けます。(解答のみならですが．)

しかし，試験会場では難問かもしれません。

第2問

[1] $f(x)=x^3-6ax+16$

$f'(x)=3x^2-6a=3(x^2-2a)$

(1) $a=0$ のとき $f(x)=x^3+16$

$y=x^3$ のグラフを y 軸の正の方向に16平行移動したもの．① $\boxed{ア}$

$a<0$ のとき，$f'(x)$ は常に正なので $y=f(x)$ のグラフは常に右上りである．

⓪ $\boxed{イ}$

(2) $a>0$ のとき，$f'(x)=0$ は異なる2つの実数解 $x=\pm\sqrt{2a}$ をもつ．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2a}$	$\cdots$	$\sqrt{2a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$f(-\sqrt{2a})=(-\sqrt{2a})^3-6a(-\sqrt{2a})+16$
$=-2a\sqrt{2a}+6a\sqrt{2a}+16=4a\sqrt{2a}+16$

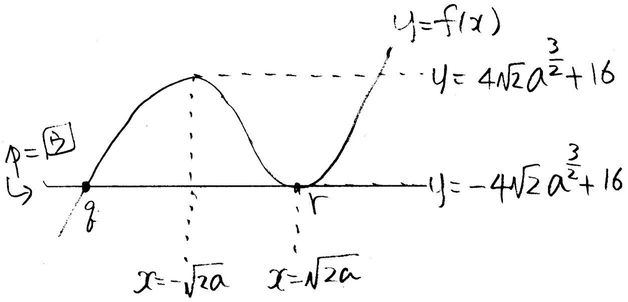
$= 4\sqrt{2}\cdot a\sqrt{a} + 16 = 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$

$f(\sqrt{2a}) = (\sqrt{2a})^3 - 6a\cdot\sqrt{2a} + 16$

$= 2a\sqrt{2a} - 6a\sqrt{2a} + 16$

$= -4a\sqrt{2a} + 16$

$= -4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$



よって、ウ,エ は　$-4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16 < p < 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$

より、　$\underbrace{③}_{ウ} < p < \underbrace{②}_{エ}$

$f(x) = -4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$ を解く。$x=\sqrt{2a}$ を重解にもつことがわかっているので、$(x-\sqrt{2a})^2$ をつくる。

$x^3 - 6ax + 16 = -4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} + 16$

$x^3 - 6ax + 4\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}} = 0$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\sqrt{2a} & 1 & 0 & -6a & 4\sqrt{2}a\sqrt{a} \\
 & & \sqrt{2a} & 2a & -4a\cdot\sqrt{2a} \\
\hline
\sqrt{2a} & 1 & \sqrt{2a} & -4a & 0 \\
 & & \sqrt{2a} & 4a & \\
\hline
 & 1 & 2\sqrt{2a} & 0 &
\end{array}
$$

$(x-\sqrt{2a})^2(x+2\sqrt{2a}) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2a}, -2\sqrt{2a}$

(※解と係数の関係から、

$\sqrt{2a}\cdot\sqrt{2a}\cdot q = -4\sqrt{2}\cdot a^{\frac{3}{2}}$

$2aq = -4\sqrt{2}a\sqrt{a}$

$q = -2\sqrt{2a}$

としてもよい)

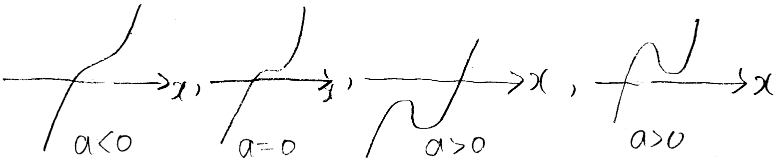
よって、

$r = \sqrt{2a} = \sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$　$\sqrt{\boxed{ク}}$

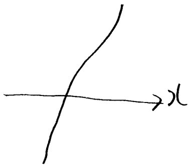
$q = -2\sqrt{2a} = -2\sqrt{2}a^{\frac{1}{2}}$　$\boxed{オカ}\sqrt{\boxed{キ}}$

(3) $y=f(x)$のグラフをかいて考えてみよう　⑥

⓪ $n=1$のとき、下図のようになるから、$a<0$は不適.

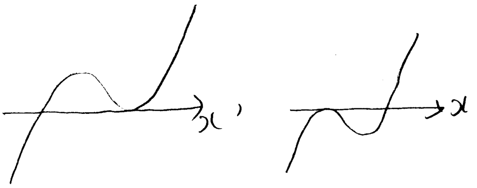


① $a<0$のとき



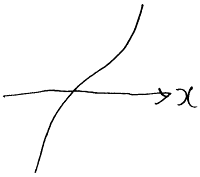
だから $n=1$　(○)

② $n=2$のとき



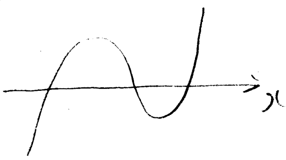
だから、$a>0$　(×)

③ $a<0$のとき



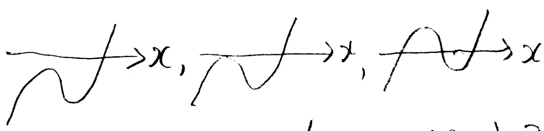
$n=1$　(×)

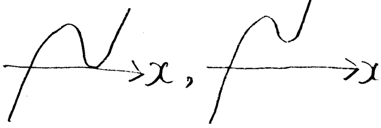
④



$a>0$
(逆は成立せず)
(○)

⑤ $a>0$のとき





$n=1, 2, 3$のいずれか　(×)

よって、ア, イは ①, ④

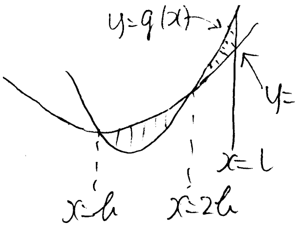
〔2〕 $b>0$, $g(x)=x^3-3bx+3b^2$,
$h(x)=x^3-x^2+b^2$ $(b>0)$

$g(x)=h(x)$ を解く.

$g(x)-h(x)=(x^3-3bx+3b^2)-(x^3-x^2+b^2)$
$=x^2-3bx+2b^2$
$=(x-b)(x-2b)=0$ ……①

より, $x=b, 2b$
$b>0$ より $b<2b$
よって, $\alpha=b$, $\beta=2b$ $\boxed{セ}$, $\boxed{ソタ}$

$\alpha \leqq x \leqq \beta$ つまり $b \leqq x \leqq 2b$ のとき
$g(x)-h(x) \leqq 0$
よって, $g(x) \leqq h(x)$ ($y=h(x)$ のグラフが
$y=g(x)$ のグラフの上方にある)



(グラフは

$S=\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx$ ② $\boxed{チ}$
$=-\int_b^{2b}(x-b)(x-2b)dx$ (①を利用)
$=\frac{1}{6}(2b-b)^3=\frac{1}{6}b^3$

$T=\int_{2b}^{t}\{g(x)-h(x)\}dx$ ($2b \leqq x \leqq t$ では $g(x)$ が上)
$\boxed{ツ}$ ①

$S-T=\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx-\int_{2b}^{t}\{g(x)-h(x)\}dx$
$=\int_b^{2b}\{h(x)-g(x)\}dx+\int_{2b}^{t}\{h(x)-g(x)\}dx$

$=\int_a^t \{h(x)-g(x)\}dx$ $\boxed{ク}$ 2

$=-\int_a^t (x^2-3ax+2a^2)dx$

$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}ax^2+2a^2x\right]_a^t$

$=-\left\{\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}at^2+2a^2t\right)-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^3+2a^3\right)\right\}$

$=-\left(\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}at^2+2a^2t-\frac{5}{6}a^3\right)$

$=\frac{-1}{6}(2t^3-9at^2+12a^2t-5a^3)$ $\frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$, $\boxed{ト}$, $\boxed{ナニ}$, $\boxed{ヌ}$

$S=T$のとき $S-T=0$ だから

$2t^3-9at^2+12a^2t-5a^3=0$

解答欄の形と, $2a<t$ より, $t=\frac{5}{2}a$が解

と見当をつけて

$\frac{5}{2}$	2	−9	12	−5
		5	−10	5
	2	−4	2	0

$(t-\frac{5}{2}a)(2t^2-4at+2a^2)=0$

$(2t-5a)(t^2-2at+a^2)=0$

$(2t-5a)(t-a)^2=0$

$t>2a$ より $t=\frac{5}{2}a$ $\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$

第3問 (省略)

第4問

(1) 歩行者と自転車は1分間で

距離が1ずつ縮まる。以下, 歩行者をA,

自転車をBとする. $a=2$, $b=2$ だから, AとB

の距離は2. よって, 2分でBはAに追いつく.

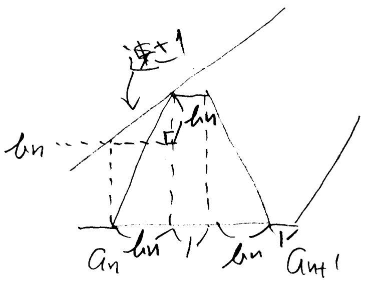
よって，($\boxed{ア}$, $\boxed{ア}$) は $\underline{(4, 4)}$ $\boxed{ア}$

a_2 はグラフで読みとって，

$a_2 = a_1 + 2 + 1 + 2 + 1 = \underline{8}$ $\boxed{イ}$

Aは1分休んだので $8 - 1 = 7$

よって，$b_2 = \underline{7}$ $\boxed{ウ}$



n回目にBが自宅を出発するとき，Aとの距離は b_n．よって，Bは b_n 分後にAに追い着く。そのときの座標はグラフより

$\underline{(a_n + b_n,\ 2b_n)}$

$\boxed{エ}$ ③ $\boxed{オ}$ ④

グラフの対称性から

$a_{n+1} = a_n + (b_n + 1 + b_n + 1)$

$= a_n + \underline{2}b_n + \underline{2}$ $\cdots$ ①

$\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$

Aは b_{n+1} に到達するまでに，b_n から $b_n + 1 + b_n + 1 - 1$（1分休んでいる）分かかっているので，

$b_{n+1} = b_n + (2b_n + 1)$

$= 3b_n + \underline{1}$ $\boxed{ク}$ $\cdots$ ②

②を変形して

$b_{n+1} + \frac{1}{2} = 3\left(b_n + \frac{1}{2}\right)$

数列 $\left\{b_n + \frac{1}{2}\right\}$ は 初項 $b_1 + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

公比3の等比数列だから

$b_n + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}$

よって，$b_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}$ 〔ケ〕 ⑦

$a_{n+1}=a_n+2b_n+2$

$=a_n+2\left(\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}\right)+2$

$=a_n+5\cdot 3^{n-1}+1$

よって，

$a_{n+1}-a_n=5\cdot 3^{n-1}+1$（階差数列）より

$n\geqq 2$のとき

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$

$=2+\sum_{k=1}^{n-1}(5\cdot 3^{k-1}+1)$

$=2+5\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1}+(n-1)$

$=2+\frac{5}{2}(3^{n-1}-1)+(n-1)$

$=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n+2-\frac{5}{2}-1$

$=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}+n-\frac{3}{2}$ 〔コ〕 ⑨

(2) $b_n\leqq 300$をみたす最大の整数nを求めよう

$\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-\frac{1}{2}\leqq 300$

$5\cdot 3^{n-1}-1\leqq 600$

$5\cdot 3^{n-1}\leqq 601$

（$600\div 5=120$だから，3^{n-1}で120に近いものを求める.）

$3^4=81$，$3^5=243$だから

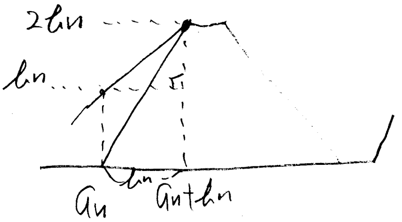
$5\cdot 3^4=405$，$5\cdot 3^5>601$

よって，$n-1=4 \Leftrightarrow n=5$

$5<n<6$ で，BがAに追いついたときの
自宅からの距離 y は

$y=2b_5=2\left(\frac{5}{2}\cdot3^4-\frac{1}{2}\right)$
$=5\cdot3^4-1$
$=5\cdot81-1$
$=404$

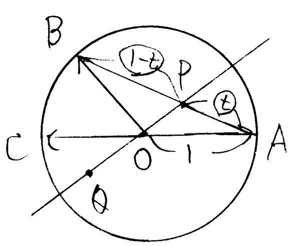
よって，$y=300$ のとき，$5<n<6$ ではBはAに追いついていない。
従って，$\boxed{サ}$ は $5-1=4$，



n回目に追いつく座標は
$(a_n+b_n,\ 2b_n)$

$a_4+b_4=\frac{5}{2}\cdot3^3+4-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}\cdot3^3-\frac{1}{2}$
$=\frac{5}{2}\cdot3^3\times2+4-2$
$=5\cdot27+2$
$=135+2$
$=137$ $\boxed{シスセ}$

$\boxed{第5問}$



(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\angle AOB$
$=1\cdot1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$
$=-\frac{2}{3}$ $\boxed{アイ}$ $\boxed{ウ}$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}=k\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}$
$=k(1-t)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$
$=(k-kt)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$
$\boxed{エ}$ 1　$\boxed{オ}$ 0

$\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OA}$
$=(k-kt+1)\overrightarrow{OA}+kt\overrightarrow{OB}$
$\boxed{カ}$ 4　$\boxed{キ}$ 0

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OP}$ のとき $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 0$

よって,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} \cdot \{(1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}\}$$

$$= (1-t)|\overrightarrow{OA}|^2 + t\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= (1-t) \cdot 1^2 + t \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= 1 - t - \frac{2}{3}t$$

$$= 1 - \frac{5}{3}t = 0$$

$$t = \frac{3}{5} \qquad \frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

(2) $\angle OCQ = 90^\circ$ より, $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{CQ}$

つまり $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{CQ}$. よって, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CQ} = 0$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{OA} \cdot \{(k - kt + 1)\overrightarrow{OA} + kt\overrightarrow{OB}\}$$

$$= (k - kt + 1)|\overrightarrow{OA}|^2 + kt\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= (k - kt + 1) \cdot 1^2 + kt\left(-\frac{2}{3}\right)$$

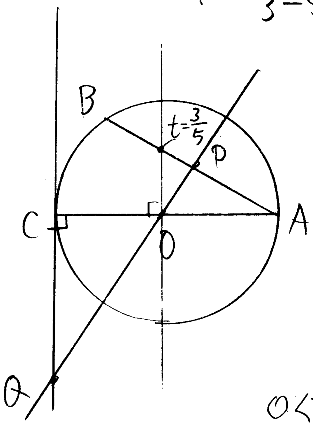
$$= k - kt + 1 - \frac{2}{3}kt = 0$$

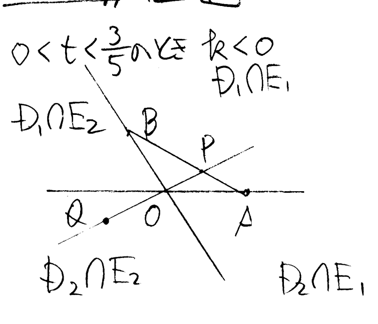
$(\times 3)$ $\quad 3k - 3kt + 3 - 2kt = 0$

$$k(3 - 5t) = -3$$

$t \neq \frac{3}{5}$ より, 両辺を $3-5t$ で割って

$$k = \frac{-3}{3-5t} = \frac{3}{5t-3} \qquad \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}\ \boxed{シ}}$$



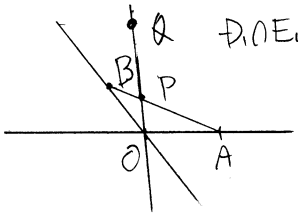


$0 < t < \frac{3}{5}$ のとき $5t - 3 < 0$ より $k < 0$

よって, Q は $D_2 \cap E_2$ に含まれる $\boxed{ス}$ 3

$\frac{3}{5}<t<1$ のとき $5t-3>0$

よって、$k>0$



従って、Q は $D_1 \cap E_1$ に含まれる。

$\boxed{セ}$ 0

(3) $t=\frac{1}{2}$ のとき $k=\frac{3}{5\cdot\frac{1}{2}-3}=\frac{6}{5-6}=-6$

よって、$\overrightarrow{OQ}=(-6+6\cdot\frac{1}{2})\overrightarrow{OA}+(-6)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$=-3\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}$

$=-3(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

すると、

$|\overrightarrow{OQ}|^2=(-3)^2|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2$

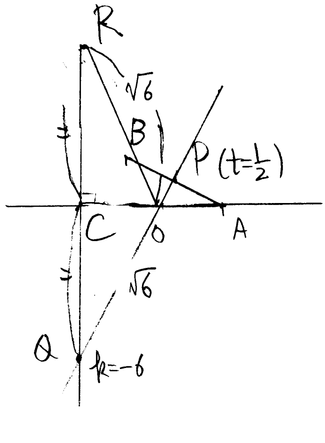
$=9\{|\overrightarrow{OA}|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\overrightarrow{OB}|^2\}$

$=9\{1^2+2\cdot(-\frac{2}{3})+1^2\}$

$=9\cdot\frac{2}{3}$

$=6$

よって、$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{6}$ $\boxed{ソ}$



$\overrightarrow{CR}=-\overrightarrow{CQ}$

$=-(-6+6\cdot\frac{1}{2}+1)\overrightarrow{OA}-(-6)\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

すると

$\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

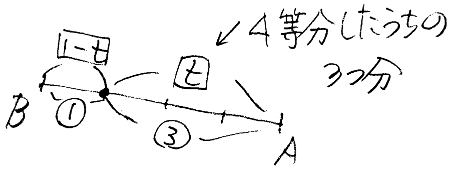
$=2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$$= \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$$

$$= 4 \cdot \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}}{3+1}$$

よって、点PはABを3:1に内分する。

従って、$t = \dfrac{3}{4}$ $\dfrac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}$



(以上)