第1問

$a+b+c=1 \cdots$ ①

$a^2+b^2+c^2=13 \cdots$ ②

(1) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ (公式)

$=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

これに①②を代入して

$1^2=13+2(ab+bc+ca)$

$13+2(ab+bc+ca)=1$

$2(ab+bc+ca)=-12$

よって $ab+bc+ca=\underline{-6}$ $\boxed{アイ}$ $\cdots$ ③

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ (展開するしかない)

$=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)$

$=2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$

$=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)$

これに②,③を代入して

$=2\times13-2(-6)$

$=26+12$

$=\underline{38}$ $\boxed{ウエ}$

(2) 誘導に従おう。

$a-b=2\sqrt{5}$

$b-c=x,\ c-a=y$ とおくと

$x+y=(b-c)+(c-a)=b-a$

$=-(a-b)=\underline{-2\sqrt{5}}$ $\boxed{オカ}$

また,(1)の計算から

$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2$

$=\underbrace{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}_{38\ \boxed{ウエ}}-\underbrace{(a-b)^2}_{(2\sqrt{5})^2}$

$=38-(2\sqrt{5})^2=38-20=\underline{18}$ $\boxed{キク}$

これらより

$(a-b)(b-c)(c-a)$

$=2\sqrt{5}xy \cdots$ ④

ここで、$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ （有名な変形）

18 $\boxed{ウエ}$ $\boxed{オカ}$

$18=(-2\sqrt{5})^2-2xy$

$18=20-2xy$

$2xy=20-18$

$2xy=2$

$xy=1$

従って、

④ $=2\sqrt{5}\times 1=\underline{2\sqrt{5}}$ $\boxed{ケ}$

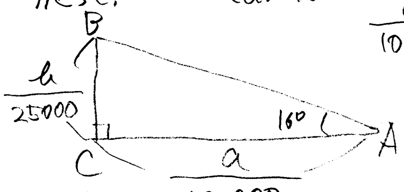
［2］ ACの実際の距離を$a$、

BCの実際の高さを$b$とすると

断面図のAC，BCは

$AC=\dfrac{a}{100000}$，$BC=\dfrac{b}{25000}$

従って、 $\tan 16^\circ=\dfrac{\frac{b}{25000}}{\frac{a}{100000}}$




$=\dfrac{b}{\cancel{25000}_{1}}\times\dfrac{\cancel{100000}^{4}}{a}$

$=\dfrac{4b}{a}$

よって、$\dfrac{4b}{a}=\tan 16^\circ$

ここで、$\tan\angle BAC=\dfrac{b}{a}$だから

$4\tan\angle BAC=\tan 16^\circ$

③

よって，$\tan\angle ABC = \frac{1}{4}\tan 16^\circ$

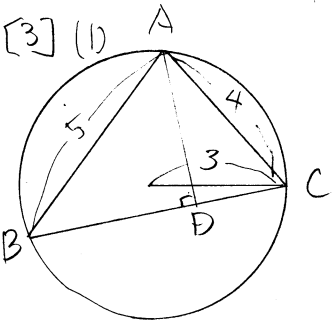
$= \frac{1}{4} \times 0.2867$

$= 0.071675$

$\fallingdotseq 0.072$ $\boxed{サシス}$

従って，∠BACは4°より大きく5°より小さい。 $\boxed{セ}$ ②

[3] (1)




正弦定理から

$$\frac{4}{\sin\angle ABC} = 2\times 3$$

$$\frac{\sin\angle ABC}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\sin\angle ABC = 4\times\frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$$

$AD = AB\sin\angle ABC$ だから

$$AD = 5\times\frac{2}{3} = \frac{10}{3} \quad \frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$$

(2) $2AB + AC = 14$ ……①

（条件は外接円の半径が3，つまり直径は6，

と△ABCが成立する条件(右欄参照)のみ）

$AB = c,\ BC = a,\ CA = b$

とすると

$a + b > c$

$b + c > a$

$c + a > b$

$0 < AB \leqq 6$ …②，$0 < AC \leqq 6$ …③

①より $AC = 14 - 2AB$ ……①'

これを③に代入して

$0 < 14 - 2AB \leqq 6$

• 左の不等号から

$0 < 14 - 2AB$

$2AB < 14$

$AB < 7$ …④

• 右の不等号から

$14-2AB \leqq 6$

$-2AB \leqq 6-14$

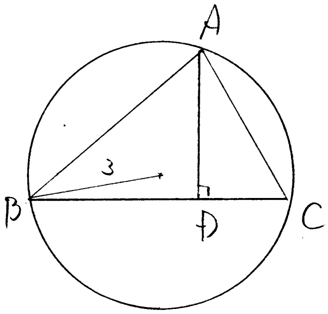
$-2AB \leqq -8$

$AB \geqq 4 \cdots$ 5

よって、2, 4, 5 から

$\underline{4} \leqq AB \leqq \underline{6}$

$\boxed{ト}$ $\boxed{ナ}$




$AD = AB\sin\angle ABC \cdots$ 6

ここで正弦定理から

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2\times 3$$

$$\frac{\sin\angle ABC}{AC} = \frac{1}{6}$$

よって、$\sin\angle ABC = \frac{1}{6}AC = \frac{1}{6}(14-2AB) \cdots$ 7

(2)の1'より

7を6に代入して

$AD = AB\times\frac{1}{6}(14-2AB)$

$= \frac{7}{3}AB - \frac{1}{3}AB^2$

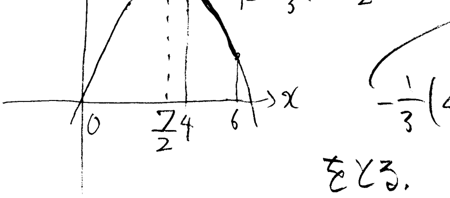
$= \underline{\frac{-1}{3}AB^2 + \frac{7}{3}AB}$ $\frac{\boxed{ニヌ}}{\boxed{ネ}}$, $\frac{\boxed{ノ}}{\boxed{ハ}}$

$= -\frac{1}{3}(AB^2 - 7AB)$

$= -\frac{1}{3}\left(AB - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{12}$

$4 \leqq AB \leqq 6$ より、ADは$AB=4$で最小値

$\boxed{ト}$ $\boxed{ナ}$




$-\frac{1}{3}(4^2 - 7\cdot 4) = \underline{4}$ $\boxed{ヒ}$

をとる。

# 第2問

〔1〕 $x^2+px+q=0 \cdots ①$

$x^2+qx+p=0 \cdots ②$

(1) $p=4,\ q=-4$ のとき

①は $x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow x=-2\pm2\sqrt{2}$

②は $x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=0$

$\Leftrightarrow x=2$

よって，$n=\underline{3}$ $\boxed{ア}$

$p=1,\ q=-2$ のとき

①は $x^2+x-2=(x-1)(x+2)=0$

$\Leftrightarrow x=1,-2$

②は $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x=1$

よって，$n=\underline{2}$ $\boxed{イ}$

(2) $p=-6$ のとき

①は $x^2-6x+q=0 \cdots ①'$

②は $x^2+qx-6=0 \cdots ②'$

二人の会話から

$\alpha^2-6\alpha+q=0 \cdots ①''$

$\alpha^2+q\alpha-6=0 \cdots ②''$

を辺々引くと

$(-6-q)\alpha+q+6=0$

$-(q+6)\alpha+(q+6)=0$

$(-\alpha+1)(q+6)=0$

よって，$\alpha=1,\ q=-6$

・$\alpha=1$ のとき

①''は $1-6+q=0 \Leftrightarrow q=5$

このとき

①'は $x^2-6x+5=(x-1)(x-5)=0$

$\Leftrightarrow x=1,5$

②′は $x^2+5x-6=(x-1)(x+6)=0$

$\Leftrightarrow x=1,-6$

よって、このとき $n=3$

- $g=-6$ のとき

①′は $x^2-6x-6=0$

③′は $x^2-6x-6=0$

となって、これらをみたす実数の個数は高々2であるから題意に反する。

次に、①′,②′の一方が重解をもち他方が重解とは異なる異なる2つの実数解をもつ場合を考える。

- ①′が重解をもつ場合、①′の判別式を $D$ とすると

$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot g=0$ （← 重解をもつ $\Leftrightarrow$ 判別式 $=0$）

$9-g=0$

よって、$g=9$

このとき重解は $x^2-6x+9=(x-3)^2=0$ より

$x=3$

②′は $x^2+9x-6=0 \Leftrightarrow x=\frac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$

よって、$n=3$ である。

- ②′が重解をもつ場合、②′の判別式を $D'$ とすると

$D'=g^2-4\times1\times(-6)=g^2+24=0$

これをみたす実数 $g$ は存在しない。

従って、②′は重解をもたない。

以上から、$n=3$ となる $g$ の値は

$g=-6,\ 9$ ウ, エ

(3) $y=x^2-6x+g$ ⋯ ③

$y=x^2+gx-6$ ⋯ ④

③について $y=(x-3)^2+g-9$

頂点 $(3, g-9)$ だから, $g$の値を1から増加させたとき, ③のグラフは軸の位置は変わらず, $y$軸の正の方向に移動する。

よって, ⑥ $\boxed{\text{オ}}$

④について $y=\left(x+\frac{g}{2}\right)^2-\frac{g^2}{4}-6$

頂点 $\left(-\frac{g}{2}, -\frac{g^2}{4}-6\right)$.

$g$の値を1から増加させたとき, 頂点の$x$, $y$座標はどちらも減少する。頂点は左下に向かって移動する

よって, ① $\boxed{\text{カ}}$

(4) $5<g<9$ のとき, ③,④のグラフは次の通りである.

③,④から$y$を消去すると

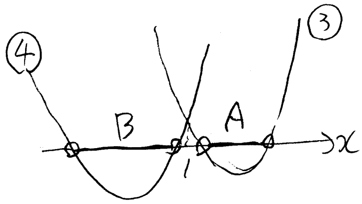
$$x^2-6x+g=x^2+gx-6$$
$$-6x-gx=-6-g$$
$$-(g+6)x=-(g+6)$$

$-(g+6)\neq 0$ より

$$x=1$$

このとき $y=1-6+g=g-5>0$

従って, ③,④のグラフは点$(1, g-5)$のみで交わっているから, 次のようになる.




従って, $x\in A \not\rightarrow x\in B$,
$x\in B \not\rightarrow x\in A$

よって, $\boxed{キ}$ は ③

$x\in B \rightarrow x\in \overline{A}$ (真)

$x\in \overline{A} \rightarrow x\in B$ (偽: 反例 $x=1$)

よって, $\boxed{ク}$ は ①

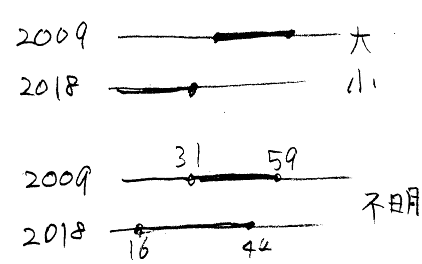
〔2〕

| | 2009年度 | 2018年度 |
|---|---|---|
| 中央値が含まれる階級の階級値 | $\frac{30+45}{2}=37.5$ | $\frac{30+45}{2}=37.5$ |
| 第1四分位数が〃 | $\frac{15+30}{2}=22.5$ | $\frac{15+30}{2}=22.5$ |
| 第3四分位数が〃 | $\frac{60+75}{2}=67.5$ | $\frac{45+60}{2}=52.5$ |
| 範囲 | 最大値 179−15=164<br>最小値 165−29=136 | 最大値 134−1=133 |
| 四分位範囲 | 最大値 74−15=59<br>最小値 60−29=31 | 最大値 59−15=44<br>最小値 45−29=16 |

・29÷2=14.5より中央値は15番目のデータ

・14÷2=7より7番目と8番目の平均

・上から7番目と8番目の平均




よって, $\boxed{ケ}$ ②, $\boxed{コ}$ ②, $\boxed{サ}$ ⓪,
$\boxed{シ}$ ⓪, $\boxed{ス}$ ③

(2) 教育機関1機あたりで最大値は約480人
よって, ①は却下。第3四分位数約240人.

240人以上は7機関だから○の数を数えて、⓪は9、②は7、③は7.
よって、⓪は却下

教員1人あたりの学習数について
15人以上30人未満は11か国。○の数を数えると
②は11か国、③は10か国.
よって、③は却下.
以上から $\boxed{セ}$ は ②

(3) $(\text{相関係数}) = \dfrac{(\text{共分散})}{(\text{Sの標準偏差})\times(\text{Tの標準偏差})}$

$= \dfrac{735.3}{39.3\times 29.9} = \dfrac{735.3}{1175.07} = 0.625\cdots$

$\fallingdotseq 0.63$ $\boxed{ソ}.\boxed{タチ}$

散分図は、右上りの対角線を引いてみると、②は0.50くらい、③は0.7くらいなので、③を答えにしよう.
$\boxed{ツ}$ は ③

第3問　知る人ぞ知る「かくらん順列」の問題です. $a_{n+2}=(n+1)(a_{n+1}+a_n)$ という漸化式まで公式になっていますので、理系受験生は瞬殺だったでしょう。

人物をA, B, C, …と大文字で、各々のプレゼントをa, b, c, …と小文字で表します。

(1) $\dfrac{A \quad B}{b \quad a}$ (上に人物，下に受け取ったプレゼントを書く)

(i)

だから，$\boxed{ア}$ は $\underline{1}$

すべての場合の数は

$\dfrac{A \quad B}{\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}}$ より 2通り．

よって，$\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ は $\underline{\dfrac{1}{2}}$

(ii)

$\dfrac{A \ B \ C}{\begin{matrix} a\,b\,c \\ a\,c\,b \\ b\,a\,c \\ b\,c\,a \\ c\,a\,b \\ c\,b\,a \end{matrix}}$

左表から

$\boxed{エ}$ は $\underline{2}$

$\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ は $\dfrac{2}{6} = \underline{\dfrac{1}{3}}$

(iii)

1回で終わるとき $\dfrac{1}{3}$

2回で終わるとき $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

3回で終わるとき $\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$

4回で終わるとき $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{81}$

よって，$\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケコ}}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{27}+\dfrac{8}{81}$

$=\dfrac{27+18+12+8}{81}$

$=\underline{\dfrac{65}{81}}$

(2) だれが自分のプレゼントを受けとるかは4通り.
残り3人は自分以外のプレゼントを受けとるから, 前ページの(ii)の表から2通り.
よって, $\boxed{サ}$ は $4\times2=\underline{8}$

どの2人が自分のプレゼントを受けとるかは $_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6$ 通り。残り2人は自分以外のプレゼントを受けるので, 1通り。よって, $\boxed{シ}$ は $6\times1=\underline{6}$

3人(つまり4人)が自分のプレゼントを受け取るのは 1通り.
よって, $\boxed{スセ}$ は $8+6+1=\underline{15}$

すべての場合の数は $a, b, c, d$ の順列だから, 4!通り. よって

$$\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}=1-\frac{15}{4!}=1-\frac{15}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1-\frac{5}{8}=\underline{\frac{3}{8}}$$

(3) かくらん順列の漸化式から
$a_3=2,\ a_4=24-15=9$ より
$a_5=4(2+9)=44$
すべての場合の数は 5!通り.
よって,

$$\frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テト}} \text{ は } \frac{44}{5!}=\frac{\cancel{44}\,11}{5\cdot\cancel{4}\cdot3\cdot2\cdot1}=\underline{\frac{11}{30}}$$

(※) (2)と同様に考えて, 自分のプレゼントを受けとる人が1人, 2人, 3人, 4人(=5人)の場合の数は順に(表をかいて考えよう)
1人…$5\times9$, 2人…$_5C_2\times2$,
3人…$_5C_3\times1$, 4人…1

これらを加えると

$5\times 9+{}_5C_2\times 2+{}_5C_3\times 1+1$

$=45+\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times 2+\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\times 1+1$

$=45+20+10+1$

$=76$

すべての場合の数は $5!$

よって, $\frac{\boxed{ケツ}}{\boxed{テト}}$ は $1-\frac{76}{5!}=1-\frac{\cancel{76}^{19}}{5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

$=1-\frac{19}{30}=\underline{\frac{11}{30}}$ //

(4) A, B, C, D がそれぞれ自分以外の人のプレゼントを受けとる事象を X, 1回目で交換会が終了する事象を Y とする。

X について, E はどの人のプレゼントを受けとってもよいことに注意すると

「Eが自分のをうけとる $\frac{1}{5}$ かつ 4人の場合に1回目で終わる」確率

$P(X)=$ (Eが自分のプレゼントをうけとる確率) + (Eが自分以外の人のプレゼントをうけとる確率) → 5人の場合に 〃

大切 $=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{8}+\frac{11}{30}=\frac{3}{40}+\frac{11}{30}=\frac{9+44}{120}=\frac{53}{120}$

$P(Y)=\frac{11}{30}$

よって, $\frac{\boxed{ナニ}}{\boxed{ヌネ}}=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{11}{30}}{\frac{53}{120}}$

$=\frac{11}{30}\times\frac{120}{53}=\underline{\frac{44}{53}}$ //

$\boxed{\text{第4問}}$

(1) $5^4=625$ を $2^4$ で割ったときの商を $k$ とすると $5^4=625=2^4k+1$

$5^4x-2^4y=1$ …… ①

$\Leftrightarrow (2^4k+1)x-2^4y=1$

$2^4kx+x-2^4y=1$

$\underbrace{2^4(kx-y)}_{\text{偶数}}+x=\underbrace{1}_{\text{奇数}}$ … ①'

よって, $x$ は少なくとも奇数.

$x$ が正の整数のとき, 最小になるのは

$x=\underline{1}$ $\boxed{\text{ア}}$

このとき ①' より $2^4(k-y)=0$

よって, $y=k$

625を $2^4=16$ で割ると商は39

$$\begin{array}{r} 39 \\ 16\,\overline{)\,625} \\ \underline{48\phantom{0}} \\ 145 \\ \underline{144} \\ 1 \end{array}$$

よって, $y=k=\underline{39}$ $\boxed{\text{イウ}}$

①' で $k=39$ とすると

$2^4(39x-y)+x=1$

$16(39x-y)+(x-1)=0$

よって, $x-1$ は16の倍数だから

$x-1=16l$ ($l$ は整数)

$x=16l+1$

$x$ が2桁の正の整数で最小になるのは, $l=1$ のときで

$x=\underline{17}$ $\boxed{\text{エオ}}$

$16(39x \cdot 17 - y) + 16 = 0$

$39 \times 17 - y + 1 = 0$

$y = 39 \times 17 + 1 = \underline{664}$ $\boxed{カキク}$

$$\begin{array}{r} 39 \\ 17 \\ \hline 273 \\ 39\phantom{0} \\ \hline 663 \end{array}$$

(2) $625^2 = (5^4)^2 = \underline{5^8}$ $\boxed{ケ}$

$m = 39$ とすると

$625^2 = (2^4m+1)^2$ (← (1)の2行目)

$= (2^4m)^2 + 2 \times 2^4m \times 1 + 1^2$

$= \underline{2^8m^2 + 2^5m + 1}$ $\boxed{コ}$ $\underline{5}$

よって，$625^2$を$5^5$で割った余りは0，

$2^5$で割ったときの余りは1.

(3) $5^5x - 2^5y = 1$ ……② より

$5^5x = 2^5y + 1$

$5^5x$を$2^5$で割ると1余る.

$625^2$も$\boxed{コ}$より$2^5$で割ると1余る

よって，$5^5x - 625^2$は$2^5$で割り切れる.

もちろん，$5^5x - 625^2 = 5^5(x - 5^3)$だから

$5^5x - 625^2$は$5^5$で割り切れる.

$5^5$と$2^5$は互いに素なので，

$5^5x - 625^2$は$5^5 \cdot 2^5$の倍数である.

$5^5x - 625^2 = 5^5 \cdot 2^5 n$ ($n$は整数) とおくと，

$5^5x = 5^5 \cdot 2^5 n + 625^2$ …③

⑮

③の両辺を$5^5$で割ると

$x=2^5n+5^3$　$(625^2=5^8,\ 5^8\div5^5=5^3)$

これをみたす3桁の正の整数$x$が最小になるのは$n=0$のときで、$x=5^3=\underline{125}$

$\boxed{サシス}$

このとき、②は

$5^5\cdot5^3-2^5y=1$

$5^8-2^5y=1$

$625^2-2^5y=1$

$2^8m^2+2^5m+1-2^5y=1$

$2^5y=2^8m^2+2^5m$

両辺を$2^5$で割って

$y=2^3m^2+m$

$=8\times39^2+39$

$=8\times(40-1)^2+39$

$=8\times(1600-80+1)+39$

$=8\times1521+39$

$=\underline{12207}$

$\boxed{セソタチツ}$

$$\begin{array}{r} 1521 \\ \times\ \ \ 8 \\ \hline 12168 \\ 39 \\ \hline 12207 \end{array}$$

(4)　$11^4=2^4p+1$（$p$は整数）とする。

$11^5x-2^5y=1$ ……④

$11\cdot11^4x-2^5y=1$

$11(2^4p+1)x-2^5y=1$

$11\cdot2^4px+11x-2^5y=1$

$2^4(11px-2y)+11x=1$ ……⑤

$2^4\cdot(-2)+11\cdot3=1$ ……⑥

$(=16)$

⑤−⑥より

$2^4(11px-2y+2)+11\cdot(x-3)=0$ …⑦

$2^4$と11は互いに素だから，$x-3$は$2^4$の倍数．$x-3=2^4 g$（$g$は整数）とすると

$x=2^4 g+3=16g+3$

$g=0$のとき$x=3$

このとき⑦より

$2^4(33p-2y+2)=0$

よって，$33p-2y+2=0$

$11^4=(11^2)^2=121^2=14641$

$14641=2^4\times 915+1$

よって，$p=915$

すると　$\underset{\text{偶}}{2y}=33p+2$

$2y=\underbrace{33\times 915}_{\text{奇}}+\underset{\text{偶}}{2}$

左辺は偶数，右辺は奇数となって不合理である．

$g=1$のとき$x=19$

このとき⑦より

$2^4(11\cdot 19p-2y+2)+11\cdot 16=0$

（$2^4$でわって）

$11\cdot 19\cdot p-2y+2+11=0$

よって，$2y=11\cdot 19\cdot p+13$

$=11\cdot 19\cdot 915+13$

$=191235+13$

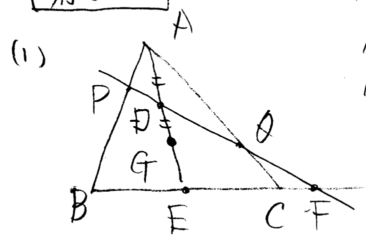
$=191248$

よって, $y = 191248 \div 2$

$\underline{y = 95624}$ //

**第5問**

(1)




$AG : GE = 2 : 1$,
$AD : DG = 1 : 1$ より
$AD : DE = 1 : 2$

よって, $\underline{\dfrac{AD}{DE} = \dfrac{1}{2}}$ // $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

メネラウスの定理より (△AEBについて)

$$\frac{BP}{AP} \cdot \underbrace{\frac{AD}{DE}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{EF}{FB} = 1$$

よって, $\dfrac{BP}{AP} = \underline{2 \times \dfrac{BF}{EF}}$ // $\boxed{ウ}, \dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$

同様に, (△AEFについて)

$$\frac{CQ}{AQ} \cdot \underbrace{\frac{AD}{DE}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \frac{EF}{FC} = 1$$

よって, $\dfrac{CQ}{AQ} = \underline{2 \times \dfrac{CF}{EF}}$ // $\boxed{カ}, \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

従って,

$$\frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ} = 2 \times \frac{BF}{EF} + 2 \times \frac{CF}{EF}$$

$$= 2 \times \frac{BF + CF}{EF}$$

$$= 2 \times \frac{(BC + CF) + CF}{EC + CF}$$

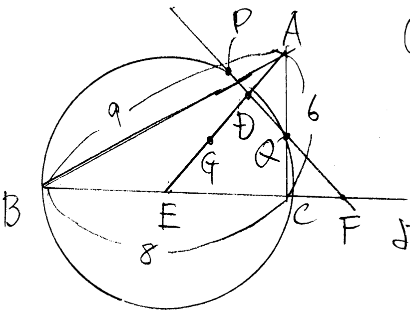
$$= 2 \times \frac{BC + 2CF}{\frac{1}{2}BC + CF}$$

分母,分子の各項に
2をかけて

$$= 2 \times \frac{2BC + 4CF}{BC + 2CF}$$

$= 2\times\dfrac{2(BC+2CF)}{BC+2CF} = \underline{4}$ $\boxed{ケ}$

(2)




$\triangle APQ \sim \triangle ACB$
(2角相等)だから

$AP : AQ = AC : AB$
$= 6 : 9$
$= 2 : 3$

よって $2AQ = 3AP$

$AQ = \underline{\dfrac{3}{2}}AP$ $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$

$AP = x$ とおくと，$AQ = \dfrac{3}{2}x$，

$BP = 9-x$，$CQ = 6-\dfrac{3}{2}x$

(1)の $\boxed{ケ}$ より

$$\frac{9-x}{x}+\frac{6-\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}=4$$

↑各項に2をかけて

$$\frac{9-x}{x}+\frac{12-3x}{3x}=4$$

両辺に $3x$ をかけて

$$3(9-x)+12-3x=12x$$
$$27-3x+12-3x=12x$$
$$-18x=-39$$
$$x=\frac{39}{18}=\frac{13}{6}$$

よって，$AP = \underline{\dfrac{13}{6}}$ $\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$，$AQ = \dfrac{\cancel{3}^{1}}{2}\times\dfrac{13}{\cancel{6}_{2}} = \underline{\dfrac{13}{4}}$ $\dfrac{\boxed{ソタ}}{\boxed{チ}}$

$CF = y$ とおくと $\triangle ABC$ でメネラウスの定理を用いて，

$$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QC}=1$$

$$\frac{y}{y+8}\cdot\frac{9-\frac{13}{6}}{\frac{13}{6}}\cdot\frac{\frac{13}{4}}{6-\frac{13}{4}}=1$$

(2番目は各項に6を，3番目は各項に4をかけよう)

(落ち着いて計算して)

$$\frac{y}{y+8}\cdot\frac{54-13}{13}\cdot\frac{13}{24-13}=1$$

$$\frac{y}{y+8}\cdot\frac{41}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{13}}{11}=1$$

$$\frac{y}{y+8}=\frac{11}{41}$$

$$41y=11(y+8)$$

$$41y=11y+88$$

$$30y=88$$

$$y=\frac{88}{30}=\underline{\frac{44}{15}}_{//}\quad\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{トナ}}$$

(3) $AD=kDE$ ($k$は正数)とおくと

$$\frac{AD}{DE}=k$$

よって，(1)と同様にして

$$\frac{BP}{AP}+\frac{CQ}{AQ}=\frac{1}{k}\cdot\left(\frac{BF}{EF}+\frac{CF}{EF}\right)$$

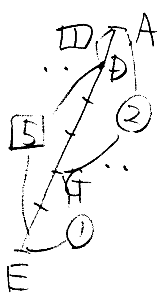
$$=\frac{1}{k}\times 2=\frac{2}{k}$$

これが10に等しいから

$$\frac{2}{k}=10 \Leftrightarrow \frac{k}{2}=\frac{1}{10}$$

$$\Leftrightarrow k=\frac{1}{5}$$

従って，$AD:DE=1:5$




ゆえに　$AD:DG=1:3$

よって，$\displaystyle\frac{AD}{DG}=\underline{\frac{1}{3}}_{//}\quad\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$

(終)