2021年度 共通テスト 数学ⅡB (1月17日(日) 実施)

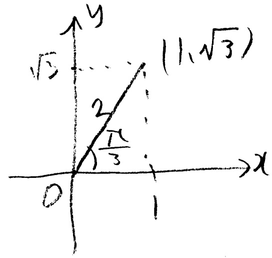
第1問

〔1〕

(1) $y=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta \ (0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$

$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ より

$\underline{\quad}_{//}$ ア

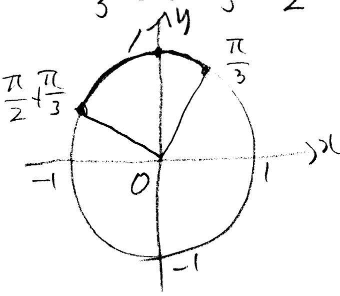


$y=2(\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta)$

$=2(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{3})$

$\underline{=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}_{//}$ イ ← 一気に書いてよい.

$\frac{\pi}{3}\leqq\theta+\frac{\pi}{3}\leqq\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$ より yは



$\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ つまり $\theta=\underline{\frac{\pi}{6}}_{//}$ ウ

で最大値

$2\sin\frac{\pi}{2}=\underline{2}_{//}$ エ

をとる.

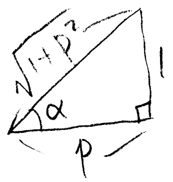
(2) $y=\sin\theta+p\cos\theta \ (0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2})$

(i) $p=0$ のとき $y=\sin\theta$

yは $\theta=\underline{\frac{\pi}{2}}_{//}$ オ で最大値 $\underline{1}_{//}$ カ

をとる.

(ii) $p>0$ のとき



$y=\sqrt{1+p^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\sin\theta+\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{1+p^2}(\sin\alpha\cdot\sin\theta+\cos\alpha\cdot\cos\theta)$

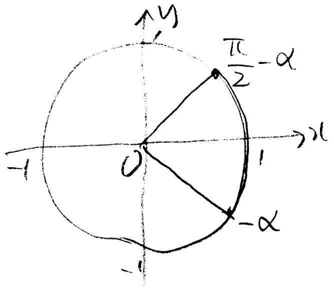
$=\sqrt{1+p^2}(\cos\theta\cdot\cos\alpha+\sin\theta\cdot\sin\alpha)$

$=\underline{\sqrt{1+p^2}}\cos(\theta-\alpha)$ $\boxed{キ}$ 9

ただし、α は $\sin\alpha=\underline{\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}}$, $\cos\alpha=\underline{\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}}$, $\boxed{ク}$ 1, $\boxed{ケ}$ 3

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす。

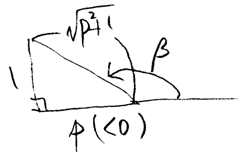
このとき、y は $-\alpha<\theta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ より



$\theta-\alpha=0$ つまり $\theta=\underline{\alpha}$ で $\boxed{コ}$ 1

最大値 $\sqrt{1+p^2}\cdot 1=\underline{\sqrt{1+p^2}}$ $\boxed{サ}$ 9

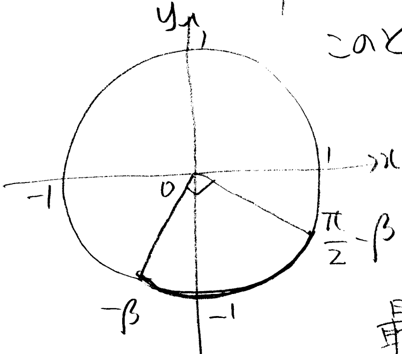
をとる。



(iii) $p<0$ のとき、

$y=\sqrt{1+p^2}\cos(\theta-\beta)$ で、β は $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$,

$\cos\beta=\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$ をみたすものとする。



このとき、$-\beta\leqq\theta-\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}-\beta$

で、y は

$\theta-\beta=\dfrac{\pi}{2}-\beta$

つまり $\theta=\underline{\dfrac{\pi}{2}}$ で $\boxed{シ}$ 2

最大値 $\sqrt{1+p^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\beta\right)$

$=\sqrt{1+p^2}\cdot\sin\beta=\sqrt{1+p^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\underline{1}$ $\boxed{ス}$ 1

をとる。

※一番最初の式 $y=\sin\theta+p\cos\theta$

に $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ を代入する方がよい。

[2] $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$, $g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$

(1) $f(0)=\dfrac{2^0+2^{-0}}{2}=\dfrac{1+1}{2}=\underline{1}$ $\boxed{セ}$

$g(0)=\dfrac{2^0-2^{-0}}{2}=\dfrac{1-1}{2}=\underline{0}$ $\boxed{ソ}$

$2^x>0$, $2^{-x}>0$ だから 相加相乗平均の不等式より

$f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}\geqq\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=1$

等号は $2^x=2^{-x}$ つまり $2^{2x}=1 \Leftrightarrow x=0$ のときに成り立つ.

$\Leftarrow 2^x=2^{-x}\Leftrightarrow 2^x=\dfrac{1}{2^x}$

$\Leftrightarrow (2^x)^2=1$

$2^x>0$ だから

$\Leftrightarrow 2^x=1=2^0$

$\Leftrightarrow x=0$

よって, $f(x)$ は $\underline{x=0}$ $\boxed{タ}$ で最小値 $\underline{1}$ $\boxed{チ}$ をとる.

$g(x)=-2$ となるとき

$\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}=-2 \Leftrightarrow 2^x-2^{-x}=-4$

$\Leftrightarrow 2^x-\dfrac{1}{2^x}=-4$

$2^x=t$ とおくと

$t-\dfrac{1}{t}=-4 \Leftrightarrow t^2-1=-4t$

$\Leftrightarrow t^2+4t-1=0 \Leftrightarrow t=-2\pm\sqrt{5}$

$2^x=t>0$ より $t=-2+\sqrt{5}$

よって, $2^x=-2+\sqrt{5} \Leftrightarrow x=\log_2(-2+\sqrt{5})$

$=\log_2(\underline{\sqrt{5}}-\underline{2})$ $\boxed{ツ}$, $\boxed{テ}$

(2) $f(-x)=\dfrac{2^{-x}+2^{-(-x)}}{2}=\dfrac{2^{-x}+2^x}{2}=\underline{f(x)}$ $\boxed{ト}$ $\underline{0}$

$g(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^{-(-x)}}{2}=\dfrac{2^{-x}-2^x}{2}=\dfrac{-(2^x-2^{-x})}{2}=\underline{-g(x)}$ $\boxed{ナ}$ $\underline{3}$

$$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=\left(\frac{2^x+2^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{2^x-2^{-x}}{2}\right)^2$$

$$=\frac{2^{2x}+2+2^{-2x}}{4}-\frac{2^{2x}-2+2^{-2x}}{4}$$

$$=\frac{4}{4}=\underline{1} \quad \boxed{ニ}$$

$$g(2x)=\frac{2^{2x}-2^{-2x}}{2}=\frac{(2^x+2^{-x})(2^x-2^{-x})}{2}$$

$$=2\cdot\frac{2^x+2^{-x}}{2}\cdot\frac{2^x-2^{-x}}{2}$$

$$=\underline{2f(x)g(x)} \quad \boxed{ヌ}$$

※ まるで $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sin x$ のようです。
ただし、$\boxed{ニ}$ は異なります。$\cos^2 x+\sin^2 x=1$
に似ていると考えください。

$\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$, $\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ をそれぞれ
hyperbolic cosine（ハイパボリック コサイン）, hyperbolic sine（ハイパボリック サイン）といい
ます。(厳密には a^x, a^{-x} ではなくて e^x, e^{-x}
で $e=2.718\cdots$ です。)

$\sinh x=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ は、$\sin x$, $\cos x$
と類似の性質があります。

(3) $\beta=1$ としてみると

$$f(1)=\frac{2^1+2^{-1}}{2}=\frac{2+\frac{1}{2}}{2}=\frac{5}{4},\quad g(1)=\frac{2^1-2^{-1}}{2}=\frac{3}{4}.$$

$$f(\alpha-1)=\frac{2^{\alpha-1}+2^{-(\alpha-1)}}{2}=\frac{2^{\alpha-1}+2^{-\alpha+1}}{2}$$

$$f(\alpha)g(1)+g(\alpha)\cdot f(1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^\alpha+2^{-\alpha}}{2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{2^\alpha-2^{-\alpha}}{2}$$

$$=\frac{8\cdot 2^\alpha-2\cdot 2^\alpha}{4\cdot 2}=\frac{2^{\alpha+1}-2^{\alpha-1}}{2}$$

よって，(A)は不成立．

$$f(\alpha+1)=\frac{2^{\alpha+1}+2^{-(\alpha+1)}}{2},$$

$$f(\alpha)\cdot f(1)+g(\alpha)\cdot g(1)=\frac{5}{4}\cdot\frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}$$

$$=\frac{8\cdot 2^{\alpha}+2\cdot 2^{-\alpha}}{4\cdot 2}=\frac{2^{\alpha+1}+2^{-\alpha-1}}{2}\cdots①$$

よって，(B)は成り立つ．

$$g(\alpha-1)=\frac{2^{\alpha-1}-2^{-(\alpha-1)}}{2}=\frac{2^{\alpha-1}-2^{-\alpha+1}}{2}\neq ①$$

従って，(C)は不成立．

$$g(\alpha+1)=\frac{2^{\alpha+1}-2^{-(\alpha+1)}}{2}=\frac{2^{\alpha+1}-2^{-\alpha-1}}{2}$$

$$f(\alpha)\cdot g(1)-g(\alpha)\cdot f(1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{2^{\alpha}+2^{-\alpha}}{2}-\frac{5}{4}\cdot\frac{2^{\alpha}-2^{-\alpha}}{2}$$

$$=\frac{-2\cdot 2^{\alpha}+8\cdot 2^{-\alpha}}{4\cdot 2}=\frac{-2^{\alpha-1}+2^{-\alpha+1}}{2}$$

よって，(D)は不成立．

以上から $\boxed{\text{ネ}}$ は ①(B)

$\boxed{\text{ネ}}$ (※) (B)が成立することが分かった時点で解答してよい．(D)ではなく(B)を正解にしたことに対して出題者の良心を少し感じる。

$\boxed{\text{第2問}}$

$$y=3x^2+2x+3\cdots①$$

$$y=2x^2+2x+3\cdots②$$

$x=0$ のとき ①：$y=3$，②：$y=3$

よって，$\boxed{\text{ア}}$ は 3

①について，$y'=6x+2$，②について $y'=4x+2$

①，②どちらにしろ $x=0$ のとき $y'=2$

よって, y軸との交点における接線の方程式は

$y=2x+3$ $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$

⓪〜⑤を微分して $x=0$ を代入したとき $y'=2$

になるのは, ①, ②, ④ (実際に計算してね.)

$x=0$ のとき $y=3$ となるのは ④ のみ.

よって, $\boxed{\text{エ}}$ は ④ $\boxed{\text{エ}}$

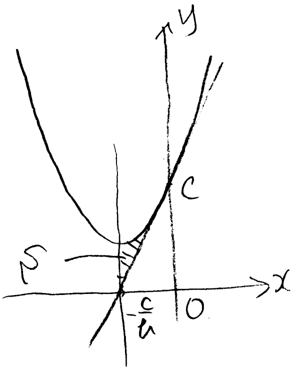
$y=ax^2+bx+c$ …あ, $y'=2ax+b$

あの点 $(0,\ c)$ で引いた接線 l の方程式は

$\boxed{\text{オ}}$

$y=bx+c$ $\boxed{\text{カ}}$, $\boxed{\text{キ}}$ …い

いで $y=0$ とすると $x=-\dfrac{c}{b}=\dfrac{-c}{b}$ $\dfrac{\boxed{\text{クケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$



$$S=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}\{(ax^2+bx+c)-(bx+c)\}dx$$

$$=\int_{-\frac{c}{b}}^{0}ax^2dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{-\frac{c}{b}}^{0}$$

$$=0-\left\{\frac{a}{3}\left(-\frac{c}{b}\right)^3\right\}$$

$$=\frac{ac^3}{3b^3}$$ $\boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$, $\boxed{\text{ス}}$ …③

$a=1$ とすると $S=\dfrac{c^3}{3b^3} \Leftrightarrow 3b^3S=c^3$

$\Leftrightarrow c^3=3Sb^3 \Leftrightarrow c=\sqrt[3]{3S}\cdot b$

S は一定だから, c は b の1次関数。よって, $\boxed{\text{セ}}$ は ⓪

(2) $y=4x^3+2x^2+3x+5 \cdots\cdots ④$, $y'=12x^2+4x+3$

$y=-2x^3+7x^2+3x+5 \cdots\cdots ⑤$, $y'=-6x^2+14x+3$

$y=5x^3-x^2+3x+5 \cdots\cdots ⑥$, $y'=15x^2-2x+3$

$\boxed{ソ}$ は $\underline{5}$ $\boxed{ソ}$

④, ⑤, ⑥ は $x=0$ のときいずれも $y'=3$

よって, y 軸との交点における接線の方程式は

$y=\underline{3x+5}$ $\boxed{タ}$, $\boxed{チ}$

$y=ax^3+bx^2+cx+d \cdots ③$, $y'=3ax^2+2bx+c$

③ 上の点 $(0, \underline{d})$ $\boxed{ツ}$ における接線の方程式は

$y'=c$ であるから, $y=\underline{cx+d}$ $\boxed{テ}$, $\boxed{ト}$

$h(x)=f(x)-g(x)=ax^3+bx^2$

$=x^2(ax+b)$

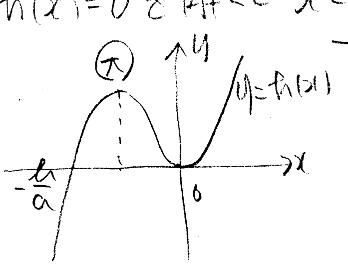
$h'(x)=3ax^2+2bx=x(3ax+2b)$

x	$\cdots$	$-\dfrac{2b}{3a}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x=-\dfrac{2b}{3a}\,(<0)$ で極大, $x=0$ で極小なので

グラフは $\underline{②}$ $\boxed{ナ}$

$h(x)=0$ を解くと $x=\underline{0,\ -\dfrac{b}{a}\left(=\dfrac{-b}{a}\right)}$ $\boxed{ニ}$, $\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$



$|h(x)|$ は $x=\underline{\dfrac{-2b}{3a}}$ で最大

となる. $\dfrac{\boxed{ハヒフ}}{\boxed{ヘホ}}$

$\boxed{\text{第4問}}$

$a_n = 3+(n-1)p$, $b_n = 3\cdot r^{n-1}$
$(p \neq 0, r \neq 0)$

$a_n b_{n+1} - 2a_{n+1} b_n + 3b_{n+1} = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots) \cdots ①$

(1) $a_n = \underline{3} + (n-1)p \cdots ②$ $\boxed{ア}$

$a_{n+1} = 3 + np \cdots ③$

$b_n = \underline{3}\cdot r^{n-1}$ $\boxed{イ}$

①の両辺をb_nで割ると

$$a_n \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n} - 2a_{n+1} + \frac{3b_{n+1}}{b_n} = 0$$

$\Leftrightarrow \ a_n \cdot r - 2a_{n+1} + 3r = 0$

$\Leftrightarrow \ 2a_{n+1} = ra_n + 3r$

$\Leftrightarrow \ \underline{2}a_{n+1} = r(a_n + \underline{3}) \cdots ④$ $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$

④に②,③を代入すると

$2(3+np) = r\{3+(n-1)p+3\}$

$\Leftrightarrow \ 6+2pn = 6r + rpn - rp$

$\Leftrightarrow \ 2pn - rpn = -rp + 6r - 6$

$\Leftrightarrow \ \overset{\times(-1)}{rpn - 2pn = rp - 6r + 6}$

$\Leftrightarrow \ (r-\underline{2})pn = r(p-\underline{6}) + \underline{6} \cdots ⑤$ $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$

⑤はnの恒等式だから

$(r-2)p = 0 \cdots ㋐$ かつ $r(p-6)+6 = 0 \cdots ㋑$

$p \neq 0$より㋐より $r = 2$

$r=2$ を①に代入して

$2(p-6)+6=0 \Leftrightarrow p=3$ $\boxed{ケ}$

このとき

$a_n=3+(n-1)\cdot 3=3n$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}$

$\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} 3k=3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{3}{2}n(n+1)$ $\boxed{コ}$/$\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$

$\sum_{k=1}^{n} b_k=\sum_{k=1}^{n} 3\cdot 2^{k-1}=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$ $\boxed{ミ}$, $\boxed{ス}$

(3) $a_n c_{n+1}-4a_{n+1}c_n+3c_{n+1}=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ⋯⑥

$a_n>0$ より

$(a_n+3)c_{n+1}=4a_{n+1}c_n$

両辺を a_n+3 で割って

$$c_{n+1}=\frac{4a_{n+1}}{a_n+3}c_n \quad \boxed{セ},\boxed{ソ}$$

$a_n=3n$, $a_{n+1}=3(n+1)$ を代入して

$$c_{n+1}=\frac{4\cdot 3(n+1)}{3n+3}c_n=\frac{4\cdot\cancel{3(n+1)}}{\cancel{3(n+1)}}c_n$$

$\Leftrightarrow c_{n+1}=4c_n$

$c_1=3$ だから、$c_n=3\cdot 4^{n-1}$ $\boxed{タ}$ ②

(4) $d_1=3$

$d_n b_{n+1}-q d_{n+1} b_n+u b_{n+1}=0$ $(n=1,2,3,\cdots)$ ⋯⑦

$\Leftrightarrow q d_{n+1} b_n=b_{n+1}(d_n+u)$

$b_n=3\cdot 2^{n-1}>0$, $q\neq 0$ より, 両辺を $q b_n$ で割って

$$d_{n+1}=\frac{b_{n+1}}{q b_n}(d_n+u)=\frac{2}{q}(d_n+u) \quad \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}=r=2\right)$$

$\boxed{チ}$

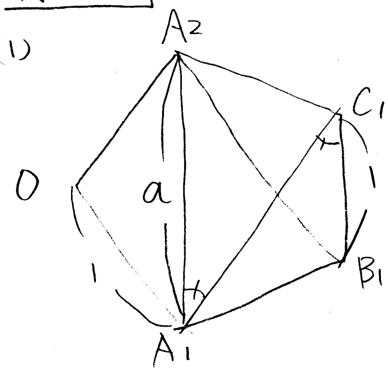
数列$\{d_n\}$が公比が0より大きく1より小さい
等比数列となるための必要十分条件は

$0<\frac{2}{q}<1 \cdots$ ② かつ $\underline{u=0}$ $\boxed{テ}$

②について，左の不等号より $q>0$.
すると右の不等号より $2<q$ （$\frac{2}{q}<1$ の両辺に $q(>0)$をかける）
よって，$\underline{q>2}$ かつ $u=0$
$\boxed{ツ}$

$\boxed{第5問}$

(1)



$\angle A_1C_1B_1 = 108° \div 3 = \underline{36°}$ $\boxed{アイ}$
また $\overrightarrow{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{B_1C_1}$（錯角が等しい）なので
$\overrightarrow{A_1A_2} = \underline{a}\overrightarrow{B_1C_1}$ $\boxed{ウ}$

よって，
$\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{a}\overrightarrow{A_1A_2} = \frac{1}{a}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})$

また，$\overrightarrow{OA_1}$ と $\overrightarrow{A_2B_1}$ は平行で，さらに$\overrightarrow{OA_2}$と$\overrightarrow{A_1C_1}$も平行であることから

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{B_1C_1} &= \overrightarrow{B_1A_2} + \overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \\
&= -\overrightarrow{A_2B_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} \\
&= -a\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_1} + a\overrightarrow{OA_2} \\
&= (a-1)\overrightarrow{OA_2} - (a-1)\overrightarrow{OA_1} \\
&= \underline{(a-1)}(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1})
\end{aligned}$$
$\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$

従って，

$\frac{1}{a} = a-1$ が成り立つ。これを $a>0$に注意して

解くと $1 = a^2 - a \Leftrightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ より $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(2)

面 $OA_1B_1C_1A_2$ に着目する. $\overrightarrow{OA_1} /\!/ \overrightarrow{A_2B_1}$ であるから

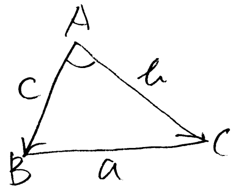
$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_1}=\overrightarrow{OA_2}+a\overrightarrow{OA_1}$ である。また,

$$|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}|^2=|\overrightarrow{A_1A_2}|^2=a^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \boxed{\text{カ}},\boxed{\text{キ}},\boxed{\text{ク}} \cdots あ$$

に注意すると

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{OA_1}|^2+|\overrightarrow{OA_2}|^2-|\overrightarrow{A_1A_2}|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1^2+1^2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{1-\sqrt{5}}{4} \quad \boxed{\text{ケ}},\boxed{\text{コ}},\boxed{\text{サ}}$$

$\Leftarrow$



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$ は公式として覚えておこう. (余弦定理からすぐわかります.)

なお, あの $|\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_1}|^2$ を展開して

$|\overrightarrow{OA_2}|^2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+|\overrightarrow{OA_1}|^2$

$=1-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}+1$

これと $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ と等置して

$$2-2\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

としてもよい。

次に面 $OA_2B_2C_2A_3$ に着目すると

$$\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2}$$

である。さらに

$$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OA_1}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\left(=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}\right)$$

が成り立つことがわかる. ゆえに

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_1}\cdot(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2})$$
$$=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$
$$=(1+a)\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}$$
$$=\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{5}}{8}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \boxed{\text{シ}} \quad 9$$

$$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OB_1}\cdot(\overrightarrow{OA_3}+a\overrightarrow{OA_2})$$
$$=\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OB_1}+a\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OB_1}$$

$$\overrightarrow{OA_2}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{2}\left(|\overrightarrow{OA_2}|^2+|\overrightarrow{OB_1}|^2-|\overrightarrow{A_2B_1}|^2\right)$$
$$=\frac{1}{2}(1^2+a^2-a^2)$$
$$=\frac{1}{2}$$

ここで，図形の対称性から

$$\overrightarrow{OA_3}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}\left(=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

よって，

$$\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\underline{0}_{//}\quad \boxed{ス}\ \underline{0}_{//}$$

面 $A_2C_1DEB_2$ に着目する．

$\overrightarrow{B_2D}=a\overrightarrow{A_2C_1}=\overrightarrow{OB_1}$ であることに注意すると，

4点 O, B_1, D, B_2 は同一平面上にあり，四角形

OB_1DB_2 は 4辺がすべて等しい $(=a)$ から

ひし形であり，かつ $\angle B_1OB_2=90^\circ$ であるから

四角形 OB_1DB_2 は <u>正方形</u>// である． $\boxed{セ}$ <u>0</u>//

$\Leftarrow$ $\boxed{ス}$ より $\overrightarrow{OB_1}\perp\overrightarrow{OB_2}$

$\Leftrightarrow \angle B_1OB_2=90^\circ$

※ 3 は，正方形は長方形かつひし形だからNG．

4 は 正方形は平行四辺形だからNG．

5 は 正方形は台形だからNG．

（以上）