令和2年度 京都府公立高校入試
(2020) 前期 数学

$\boxed{1}$

(1) $8\times\left(-\frac{3}{2}\right)^2-(-4^2)$

$=8\times\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}-(-4\times4)$

$=8\times\frac{9}{4}-(-16)$

$=2\times9+16$

$=18+16$

$=\underline{34}$ 〔1〕

← $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$に( )に2乗がついているので( )×( )と( )ごと2回かける.

← -4^2は数字4にだけ2乗がついているので 4×4と数字だけ2回かける.

(2) $\frac{4a-3}{6}-\frac{6a-5}{9}$

$=\frac{3(4a-3)}{18}-\frac{2(6a-5)}{18}$

$=\frac{3(4a-3)-2(6a-5)}{18}$

$=\frac{12a-9-12a+10}{18}$

$=\underline{\frac{1}{18}}$ 〔2〕

(3)

$\frac{2}{3}x^2y^3\div\left(-\frac{1}{8}xy\right)\div\frac{4}{9}y$

← 横にある文字を上に上げる

$=\frac{2x^2y^3}{3}\div\left(-\frac{xy}{8}\right)\div\frac{4y}{9}$

← 割り算は逆数のかけ算になおす.

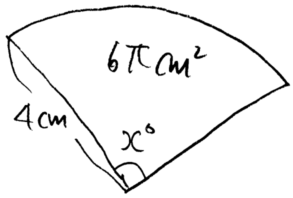
$=\frac{2x^2y^3}{3}\times\left(-\frac{8}{xy}\right)\times\frac{9}{4y}$

← 符号を決めて,数字,x,yに分けてかけ算しよう。

$=-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}}\times\frac{\cancel{8}^{2}}{1}\times\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{4}_{1}}\times x^2\times\frac{1}{x}\times y^3\times\frac{1}{y}\times\frac{1}{y}$

$=\underline{-12xy}$ 〔3〕

(4)



中心角を$x°$とすると

$$\pi \times 4^2 \times \frac{x}{360} = 6\pi$$

$$\pi \times 16 \times \frac{x}{360} = 6\pi$$

両辺をπで割って

$$16 \times \frac{x}{360} = 6$$

両辺に$\frac{360}{16}$をかけて

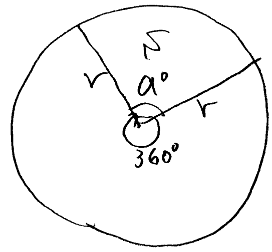
$$x = \cancel{6}^{3} \times \frac{\cancel{360}^{\cancel{180}\ 45}}{\cancel{16}_{\cancel{8}\ \cancel{2}\ 1}} = 3 \times 45$$

$$= 135$$

答えは $\underline{135°}$ [4]

半径r, 中心角a°の扇形の面積をSとすると

$$S = \pi r^2 \times \frac{a}{360}$$



(5)

$$\begin{cases} ax - by = 23 \cdots ① \\ 2x - ay = 31 \cdots ② \end{cases}$$

の解が$x=5$, $y=-3$だから, これらの値を①, ②に代入して

$$5a + 3b = 23 \cdots ③$$
$$10 + 3a = 31 \cdots ④$$

④より

$$3a = 31 - 10$$
$$3a = 21$$
$$a = 7 \cdots ⑤$$

⑤を③に代入して

$$35 + 3b = 23$$
$$3b = -12$$
$$b = -4$$

よって, $\underline{a = 7,\ b = -4}$ [5]

方程式の問題で解が与えられたら, 方程式のx (y)にその値を代入

$\boxed{\text{解がわかったら代入}}$

(6) $a=\sqrt{30}-6$ のとき

$a^2+12a+35$

$=(a^2+12a+36)-1$ ←($)^2$を作ってみました。

$=(a+6)^2-1$

$=(\sqrt{30}-6+6)^2-1$

$=(\sqrt{30})^2-1$

$=30-1$

$=\underline{29}$ [6]

※そのまま代入すると

$(\sqrt{30}-6)^2+12(\sqrt{30}-6)+35$ ← $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ の展開公式を使っています。

$=(30-12\cancel{\sqrt{30}}+36)+\cancel{12\sqrt{30}}-72+35$

$=66-72+35$

$=101-72$

$=\underline{29}$

また、因数分解して代入すると

$a^2+12a+35$ ← たして12、かけて35(=5×7)なので $(a+5)(a+7)$

$=(a+5)(a+7)$

$=(\sqrt{30}-6+5)(\sqrt{30}-6+7)$

$=(\sqrt{30}-1)(\sqrt{30}+1)$ ← $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ という展開公式を使っています。

$=(\sqrt{30})^2-1^2$

$=30-1$

$=\underline{29}$

ふつうに因数分解する方がよかったですね。

(7) $3x^2-8x-4=0$ ← 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

解の公式より

$x=\dfrac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\times3\times(-4)}}{2\times3}$

$=\dfrac{8\pm\sqrt{64+48}}{6}$

$= \dfrac{8\pm\sqrt{112}}{6}$

$= \dfrac{8\pm4\sqrt{7}}{6}$

$= \dfrac{4\pm2\sqrt{7}}{3}$ //

$$\begin{array}{r|l} 2 & 112 \\ 2 & 56 \\ 2 & 28 \\ 2 & 14 \\ & 7 \end{array}$$

[7]

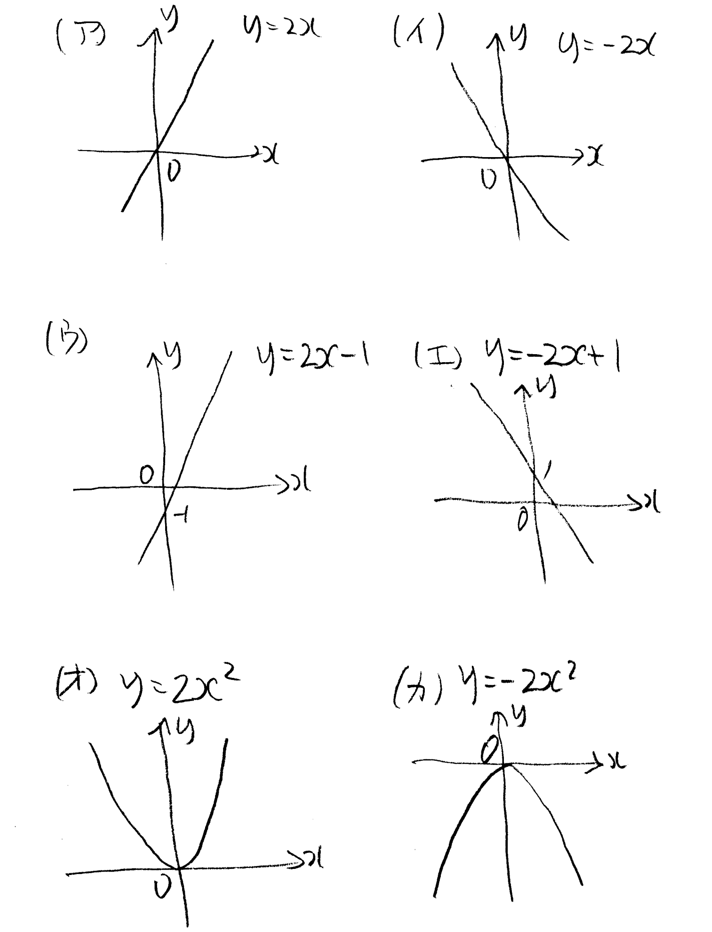
← $112=2^4\times7$ だから、

$\sqrt{112}=\sqrt{2^2\times2^2\times7}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{2^2}\times\sqrt{7}$

$=2\times2\times\sqrt{7}$

← $\dfrac{\bigcirc\pm\triangle\sqrt{7}}{\square}$ の約分は ○,△,□ を同時に割ってね。

(8)



$x<0$（y軸より左側）で x の値が増加する

（左から右に見ていく）と y の値も増加する（右上り）

関数は 上のグラフより

(ア),(ウ),(カ) //　　　　[8]

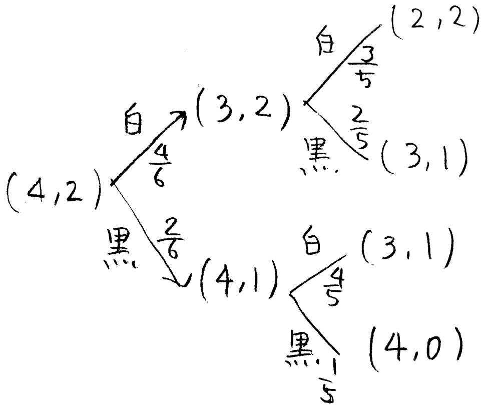
である。

(9) 白玉が4個,黒玉が2個入っている状態を

(4,2) のように書くと、白玉,黒玉の個数は

次のように推移する。

← 樹形図をかいて 枝分かれするときの確率を書きこもう。



←「少なくとも…」のときは「すべて…でない」場合(余事象という)を考えて、全体から引こう。

本問では「黒玉が1個も残らない」確率は、黒玉をつづけて2回取り出す場合だから $\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$

答えは

1−(黒玉が1個も残らない確率)

$=1-\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=1-\frac{1}{15}=\underline{\frac{14}{15}}$ 〃　[9]

※ 白玉1, 白玉2, 白玉3, 白玉4, 黒玉1, 黒玉2 と考えると、1回目に取り出すとき玉の数は6個、2回目は5個だから、すべての場合の数は $6\times5=30$ 通り。これらはすべて同様に確からしい。黒玉が少なくとも1個残るのは、2回続けて黒玉を取り出すとき以外である。2回続けて黒玉を取り出す場合の数は 2×1 通り。

よって、答えは

$\frac{6\times5-2\times1}{6\times5}=\frac{28}{30}=\underline{\frac{14}{15}}$ 〃　[9]

とするほうが中学生的かな?

2 (1) 50人いるので中央値は25人目と26人目の冊数の平均(足して2で割る)であるが、25人目、26人目のどちらも6冊以上8冊未満の階級に属している。よって中央値は(ア), (イ), (ウ) 〃　[10]

→実際は6冊or7冊。よって中央値は6, 6.5, 7 [冊].

冊数(冊)	1年生 度数	3年生 度数
以上 未満		
0 ~ 2	2	0
2 ~ 4	6	0
4 ~ 6	10	X
6 ~ 8	8	2
8 ~ 10	15	Y
10 ~ 12	5	6
12 ~ 14	2	4
14 ~ 16	1	6
16 ~ 18	1	Z
計	50	40

(2) 4冊以上6冊未満の(階級の)相対度数が等しいことから

$$\frac{10}{50}=\frac{X}{40}$$

$$\frac{X}{40}=\frac{10}{50}$$

$$X=\frac{10}{50}\times 40=\underline{8}\ \cdots ①$$

8冊以上10冊未満の階級の相対度数は
3年生の方が大きいから

$$\frac{15}{50}<\frac{Y}{40}\ \cdots\cdots ②$$

← 中学生で不等式ってありえませんね
ちょっと考えたら，両辺に40をかけても
不等号の向きは変わらないから

$$40\times\frac{15}{50}<40\times\frac{Y}{40}$$

$$12<Y$$

と変形できるやろと出題者が考えたのかもしれないが…。

3年生が図書館で借りた本の冊数の最大の
値は16冊だから

$$Z\geqq 1\ \cdots\cdots ③$$

ここで，3年生は40人であるから

$$X+2+Y+6+4+6+Z=40$$

①を代入して

$$8+2+Y+6+4+6+Z=40$$

$$Y+Z=14\ \cdots ④$$

← 全体の人数が40人ということから
④の式を作るのが大切。
これから，Yに数を当てはめて
いけば何とかなりそうだが…

②より $\dfrac{Y}{40}>\dfrac{15}{50}$

両辺に40をかけて

$$Y>\frac{15}{50}\times 40=12\ \cdots ⑤$$

よって，Yは整数だから

$$Y=13,14,15,\cdots$$

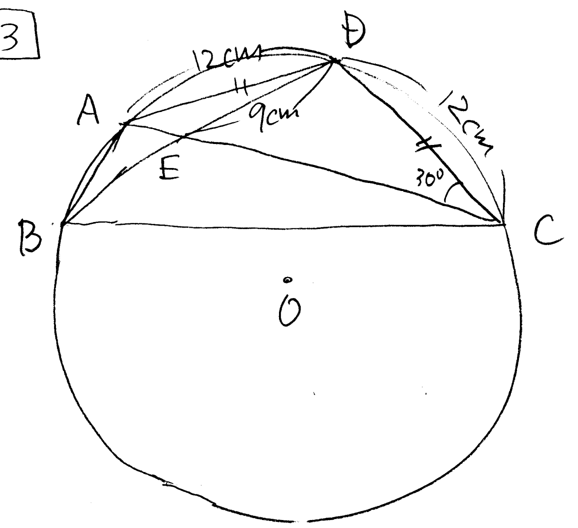
③，④より $\underline{Y=13}$，$\underline{Z=1}$

← Y=14とすると④より Z=0
となって③に反する。Y≧15の
ときも同様。

以上まとめて

$\underline{X=8,\ Y=13,\ Z=1}$ 　［11］

3



(1) △ABDと△EADにおいて

∠ADB=∠EDB(共通)

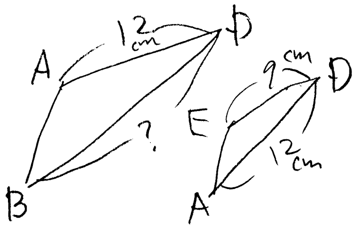
弧の長さ12cmに対する円周角だから

∠ABD=∠EAD

よって,2組の角がそれぞれ等しいから

△ABD∽△EAD // [12]

(2) (1)より



AD:DB=ED:DA

12:DB=9:12

$9DB=12^2=144$

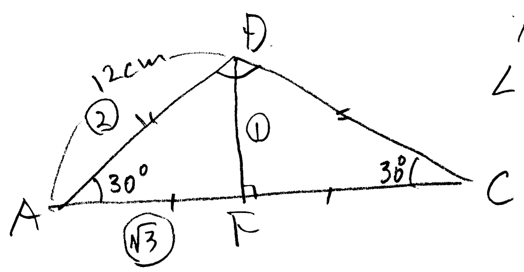
$DB=\frac{144}{9}=16$

よって, BE=DB−DE

=16−9

=7 [cm] [13]

(3)



AD=CDより
∠DACは∠DAC=∠DCAの
二等辺三角形。Dから
ACに垂線DFを下すと, AF=FCで,
△AFDは30°定規形(1:2:√3)
だから,

$DA : AF = 2 : \sqrt{3}$

$12 : AF = 2 : \sqrt{3}$

$2AF = 12\sqrt{3}$

$AF = 6\sqrt{3}$

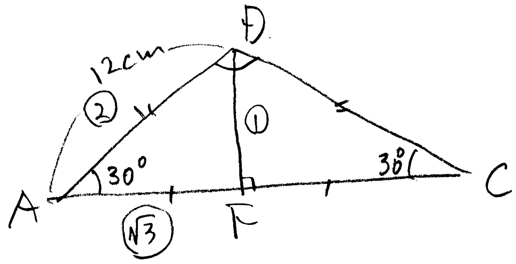
よって, $AC = 2AF = 2 \times 6\sqrt{3} = \underline{12\sqrt{3}}$ [cm]

次に,

$\triangle ABC : \triangle DAC = BE : ED$

$= 7 : 9$ ……あ

すると, 前ページの $\triangle ADF$ で



$AD : DF = 2 : 1$

$12 : DF = 2 : 1$

$2DF = 12$

$DF = 6$

よって, $\triangle DAC = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 6 = 36\sqrt{3}$ [cm²] ……い

あ, いより

$\triangle ABC : 36\sqrt{3} = 7 : 9$

$9\triangle ABC = 36\sqrt{3} \times 7$ (かけない!)

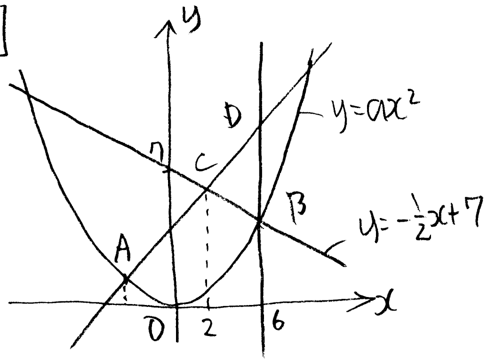
$\triangle ABC = \frac{\cancel{36}^{4}\sqrt{3} \times 7}{\cancel{9}_{1}}$

$= \underline{28\sqrt{3}}$ [cm²]

以上まとめて, 答えは

$\underline{12\sqrt{3}\ [\text{cm}],\ 28\sqrt{3}\ [\text{cm}^2]}$ [14]

4



(1) $\boxed{\text{点Bの}x\text{座標}6 \to y\text{座標} \to y=ax^2\text{に代入}}$ の流れに乗る

点Bのx座標は6だから，$y=-\frac{1}{2}x+7$ …① に代入すると

$$y=-\frac{1}{2}\times 6+7=-3+7=4$$

よって，B(6, 4)

点Bは $y=ax^2$ …② 上の点だから

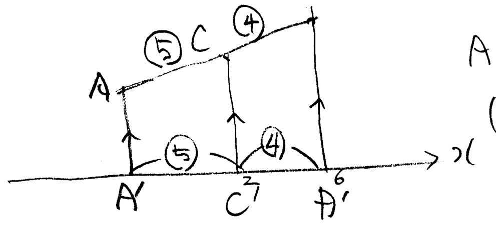
$$4=a\times 6^2$$

$$a\times 6^2=4$$

$$36a=4$$

$$a=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

3点A，C，Dからx軸に下した垂線の足をそれぞれA′，C′，D′とすると，条件より



A′C′：C′D′＝5：4
（平行線と比例）

A′(t, 0)とすると，A′C′＝2−t，C′D′＝6−2＝4

より (2−t)：4＝5：4

よって，4(2−t)＝4×5

4で割って 2−t＝5，−t＝3，t＝−3

従って，Aのx座標は−3

これを $y=\frac{1}{9}x^2$ …② に代入して

$y=\frac{1}{9}\times(-3)^2=\frac{1}{9}\times 9=1$

以上まとめて、 $\frac{1}{9}$, 3 〔15〕

(2) Cのy座標→Cの座標→2点A,Cを通る直線 の流れで解く。

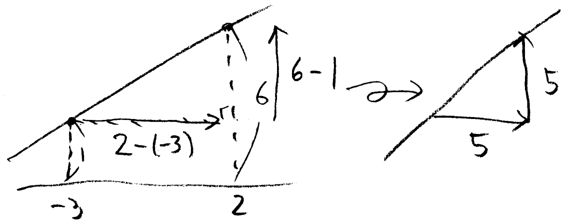
Cのx座標は2だから、①に代入して ← $y=-\frac{1}{2}x+7$ …①

$y=-\frac{1}{2}\times 2+7=-1+7=6$

よって、C(2, 6)

2点A,Cを通る直線…③の傾きは

$\frac{6-1}{2-(-3)}=\frac{5}{5}=1$



よって、③を $y=x+b$ とすると、点Cを通ることから

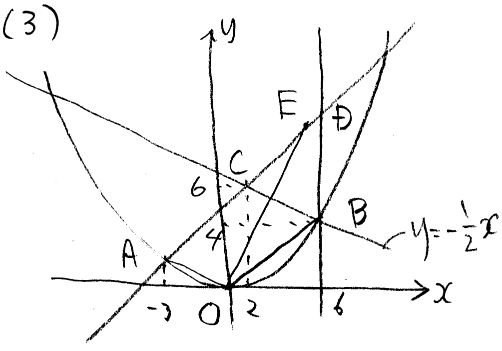
$6=2+b$

$2+b=6$

$b=4$

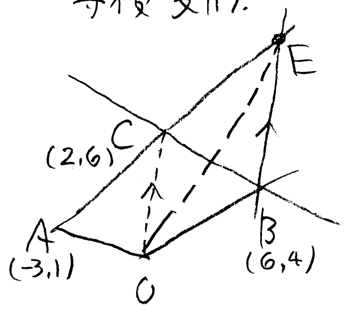
よって、答えは $y=x+4$ 〔16〕

(3)



等積変形(四角形OBCAを同じ面積をもつ△OEAに変形)の流れで行こう。

・等積変形



△OBCを等しい面積の△OECに変形する。

点Bを通って直線OCに平行な直線…④と直線ACの交点をEとすればよい。

点Bを通って直線OCに平行な直線を④とする

OCの傾きは $\frac{6}{2}=3$ だから，④を $y=3x+c$ とすると，④は点B(6,4)を通るから

$4=3\times6+c$

$3\times6+c=4$

$c=4-18$

$c=-14$

よって，④は $y=3x-14$ …④

これと直線OCとの交点の座標を求めよう.

$\begin{cases} y=x+4 \\ y=3x-14 \end{cases}$

を連立させて解く.

$x+4=3x-14$

$-2x=-18$

$x=9$

よって，$y=9+4=13$

F(9,13)とすると，

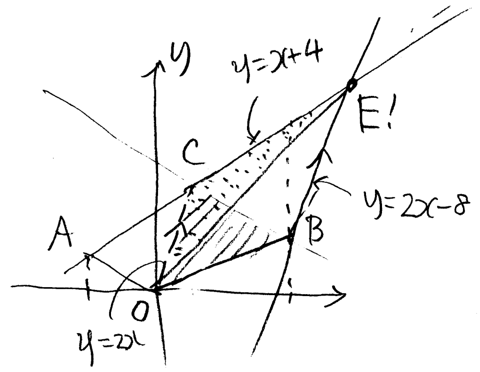
(四角形OBCA)＝△OCA＋△OBC

＝△OCA＋△OFC

＝△OFA

よって，F＝Eとすればよい.

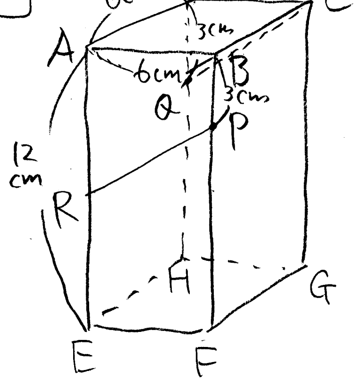
答えは E(9,13)　[17]



(斜線をつけた三角形)＝(打点部分の三角形)

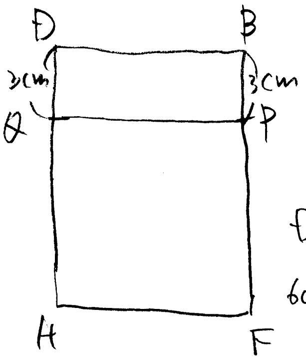
← 答案的にE(12,16)とせず，いったん別の点と見てFとおき，結果的にF＝Eである，と論じる.

5



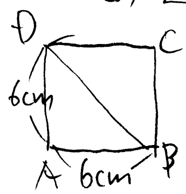
(1) $\boxed{\text{断面図BDHF}}$ $\boxed{\rightarrow\text{三平方の定理}}$ という流れ.

直方体を面BDHFで切ったときの切り口は次の通り.



PQ＝BDだから，PQは正方形ABCDの対角線の長さに等しい。

よって，△ABDで三平方の定理を用いると



$PQ=BD=\sqrt{6^2+6^2}$

$=\sqrt{72}=\underline{6\sqrt{2}}$ [cm]

[18]

(2) $\boxed{CQ=PR,\ CP=QR \rightarrow \text{ひし形} \rightarrow (\text{対角線})\times(\text{対角線})\times\frac{1}{2}}$ の流れ。

PR//CQ，面AEFB//面DHGC だから

PR＝CQ

同様に QR＝CP

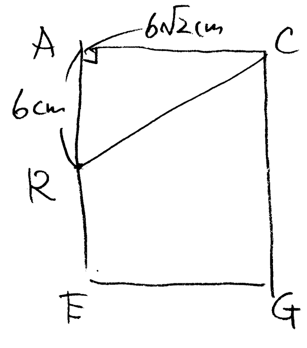
点Cから見て，点P，Qは対等だから

CP＝CQ

従って，四角形CQRPはひし形。

(1)より PQ＝$6\sqrt{2}$ [cm]

また，直方体を面AEGCで切ったときの切り口は次の通り。△ARCで三平方の定理を用いると



$CR=\sqrt{6^2+(6\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{6^2+6^2\times2}$

$=\sqrt{6^2\times(1+2)}$

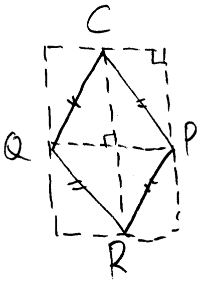
$=\sqrt{6^2\times3}$

$=6\sqrt{3}$ [cm]

よって，四角形CQRPの面積は

$PQ\times CR\times\frac{1}{2}=6\sqrt{2}\times6\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\underline{18\sqrt{6}}$ [cm²]

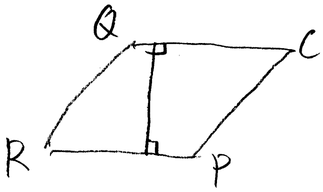
・ひし形の面積



左のように補助の長方形を作ると，8つある直角三角形はすべて合同。

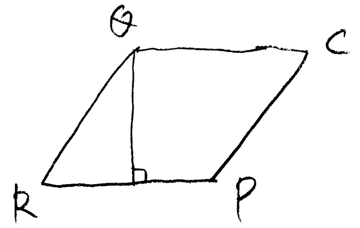
よって (ひし形)＝(長方形)×$\frac{1}{2}$

＝(ひし形の対角線の積)×$\frac{1}{2}$



直線CQと直線PRの距離をdとすると、

dはひし形CQRPでPRを底辺と見たときの高さに等しい。よって、面積より



$PR \times d = 18\sqrt{6}$, $PR = CQ = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

よって

$3\sqrt{5} \times d = 18\sqrt{6}$

$d = \dfrac{18\sqrt{6}}{3\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{30}}{5}$

以上まとめて、 $18\sqrt{6}$ [cm²], $\dfrac{6\sqrt{30}}{5}$ [cm], [19]

(13) $\boxed{\text{三角錐MCQPをPQを含み面ABCDに平行な平面で2つの三角錐に切断}}$ の流れ.

三角錐MCQPを直線PQを含み面ABCDと平行な平面Xで切って、2つの三角錐に分ける

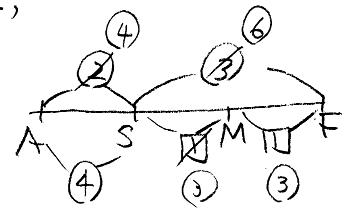
Xと線分CM, CGの交点をそれぞれN, L, Nから面BCGF, 面CDHGに下した垂線の足をU, V, 点Mから線分BGに下した垂線の足をWとする。

△NPQの面積がわかれば、体積は

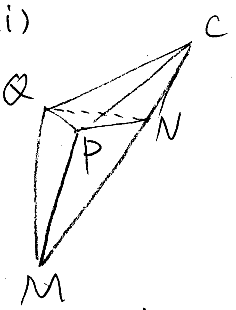
△NPQ×(Mと面ABCDの距離)×$\frac{1}{3}$

なので△NPQの面積を求めよう。直接は難しそうなので△LPQから△NLQと△NPLを引こう。

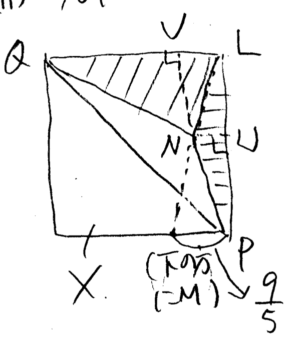
目標はNUとNVの長さ。



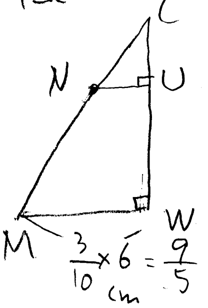
図(i)



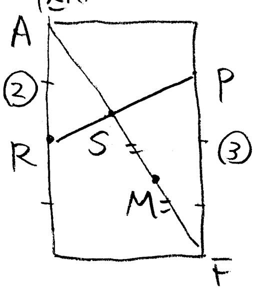
図(ii)

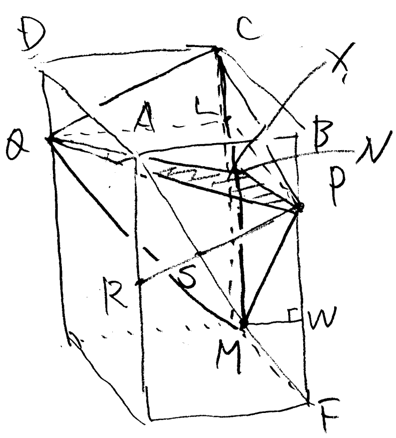


図(iii)



図(iv)



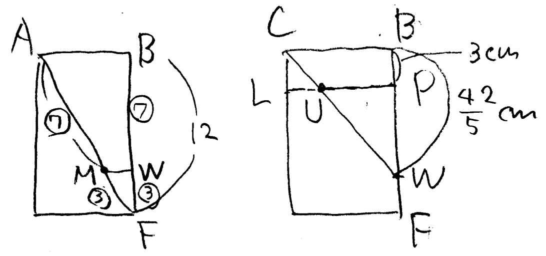


AS:SF=AR:PF=6:9=2:3 ← 図(iv)

SM:MF=1:1

よって、AM:MF=7:3

BW:WF=7:3より $BW = \dfrac{7}{7+3} \times 12 = \dfrac{42}{5}$ ←



よって、CU:CW=BP:BW=3:$\frac{42}{5}$=5:14

また、AB:MW=BF:WF=10:3

よって、

$6 : MW = 10 : 3$

$10MW = 18$

$MW = \frac{9}{5}$

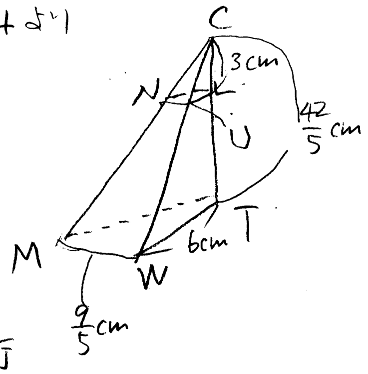
従って、

$NU : MW = CU : CW = 5 : 14$ より

$NU : \frac{9}{5} = 5 : 14$

$14NU = \frac{9}{\cancel{5}} \times \cancel{5}$

$NU = \frac{9}{14}$



また、点Mを通って面ABCDと平行な平面とCGの交点をTとすると

よって、

$LU : TW = NU : MW$

$LU : 6 = \frac{9}{14} : \frac{9}{5}$

$\frac{9}{5}LU = 6 \times \frac{9}{14}$ 、 $LU = \cancel{6}^{3} \times \frac{\cancel{9}}{\cancel{14}_{7}} \times \frac{5}{\cancel{9}} = \frac{15}{7}$

(かけない)

よって、

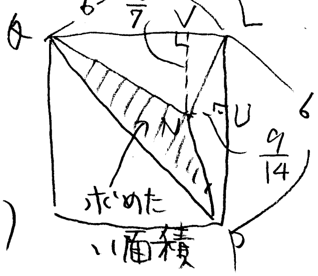
$\triangle NPQ = \triangle LPQ - (\triangle NPL + \triangle NQL)$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left(\frac{1}{2} \times 6 \times \frac{9}{14} + \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{15}{7}\right)$

$= 18 - \frac{27+90}{14}$

$= 18 - \frac{117}{14}$

$= 18 - \frac{117}{14}$ (このまま!)



従って、答えは

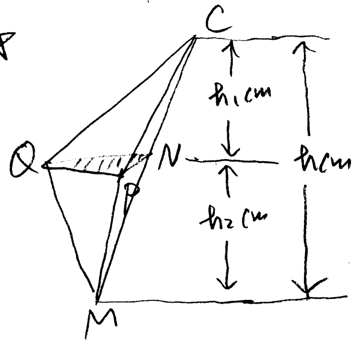
$\frac{1}{3} \times \triangle NPQ \times BW = \frac{1}{3} \times \left(18 - \frac{117}{14}\right) \times \frac{42}{5}$ 9でくくれ!

$= \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times \cancel{9}^{3}\left(2 - \frac{13}{14}\right) \times \frac{42}{5}$

$= 3 \times \frac{28-13}{\cancel{14}_{1}} \times \frac{\cancel{42}^{3}}{5}$

$= 3 \times \cancel{15}^{3} \times \frac{3}{\cancel{5}_{1}} = \underline{27 \text{ [cm}^3\text{]}}$

☆



$h$cmの体積Vは

$V = (\text{三角錐}C\text{-}NPQ) + (\text{三角錐}M\text{-}NPQ)$

$= \frac{1}{3} \times \triangle NPQ \times h_1 + \frac{1}{3} \times \triangle NPQ \times h_2$

$= \frac{1}{3} \times \triangle NPQ \times (h_1 + h_2)$

$= \underline{\frac{1}{3} \times \triangle NPQ \times h}$ です。

それにしても とんでもない問題です。

高校生になって空間図形というのを習うと次ページのように(少し)シンプルに解けます。