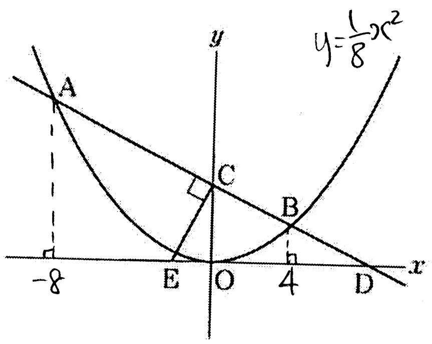
2



A, Bのy座標を求めよう

$y=\frac{1}{8}x^2$ …① に

$x=-8$ を代入して $y=\frac{1}{8}\times(-8)^2=8$

$x=4$ を代入して, $y=\frac{1}{8}\times 4^2=2$

よって, A, Bの座標はそれぞれ

A$(-8, 8)$, B$(4, 2)$

よって, 直線ABの傾きは $\frac{2-8}{4-(-8)}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}$

そこで, 直線ABの方程式は $y=-\frac{1}{2}x+b$ とおける.

これは点A$(-8, 8)$を通るので $8=-\frac{1}{2}\times(-8)+b$, $8=4+b$

[$x=-8$, $y=8$を代入]

両辺を入れ替えて $4+b=8$

よって, $b=4$

従って直線ABの方程式は $\underline{y=-\frac{1}{2}x+4}$ 答

[別解]

直線ABの方程式を $y=ax+b$ とおく.

2点A$(-8, 8)$, B$(4, 2)$を通るから,

$x=-8$, $y=8$ を代入して $8=a\times(-8)+b$

よって, $-8a+b=8$ …②

$x=4$, $y=2$ を代入して $2=a\times 4+b$

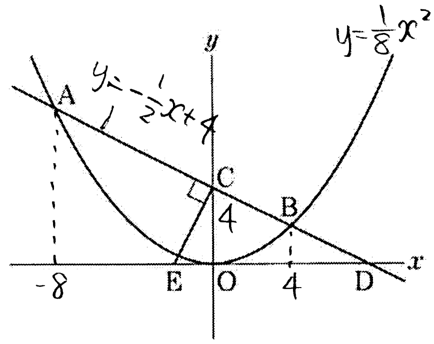
よって, $4a+b=2$ …③

②−③より $-12a=6$. これより $\underline{a=-\frac{1}{2}}$

③に代入して $4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b=2$，$-2+b=2$，$\underline{b=4}$

よって，直線ABの方程式は $\underline{y=-\frac{1}{2}x+4}$ 答

(2)



点Dは直線AB $\left(y=-\frac{1}{2}x+4\right)$ と

x軸($y=0$)の交点であるから，その

x座標は，($y=-\frac{1}{2}x+4$ に $y=0$

を代入して)

$$0=-\frac{1}{2}x+4$$

両辺を入れ替えて

$$-\frac{1}{2}x+4=0$$

-2をかけて

$$x-8=0$$

移項して

$$x=8$$

よって，点Dの座標は $\underline{(8,0)}$ 答

[x軸上の点のy座標は常に0です]

DEの長さを求めよう。(△CDEで三平方の定理が

使えるのではと考えて)

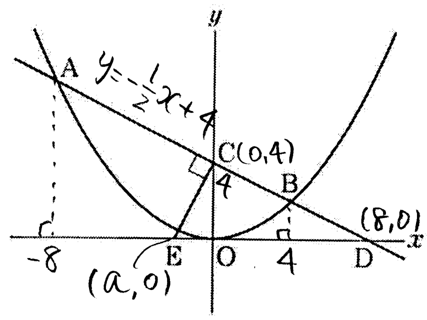
Eのx座標をaとする。(見た目，$a<0$だがここではひかえ目に)

$a<4$ …④ である。

$C(0,4)$ [点Cは直線ABの切片でした]，$D(8,0)$なので

$$CD=\sqrt{(8-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{8^2+4^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}\ (=4\sqrt{5})$$

$CE=\sqrt{(a-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{a^2+4^2}=\sqrt{a^2+16}$

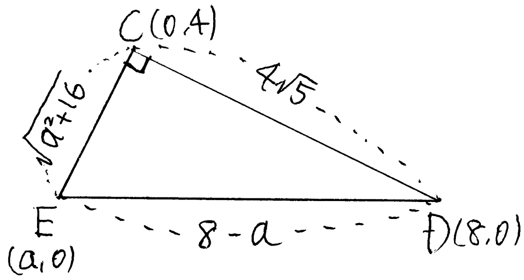


$DE=8-a$（右から左をひく）

よって，△CDEで三平方の定理を使うと

$CD^2+CE^2=DE^2$より

$(\sqrt{80})^2+(\sqrt{a^2+16})=(8-a)^2$



$80+(a^2+16)=64-16a+a^2$

$16a=64-80-16$

$16a=-32$

$a=-2$

これは $a<4$ を満たす.

よって，$DE=8-a=8-(-2)=\underline{10}$ 答

[別解]

△COD ∽ △EOCを示す。

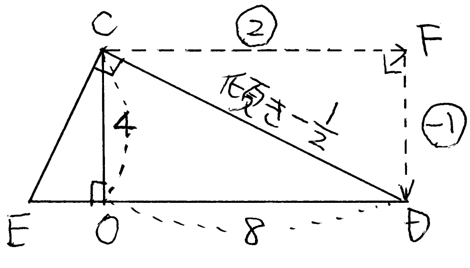
∠COD = ∠EOC = 90° … ①

∠OCD = ∠ECD − ∠OCE = ∠OEC … ②

（∠ECD = 90°です）

①，②より2組の角がそれぞれ等しいから

△COD ∽ △EOC



線分CDの傾きは$-\frac{1}{2}$だから

CF : FD = 2 : 1

よって，OD : OC = OC : OE = 2 : 1

OC = 4だから　4 : OE = 2 : 1

2OE = 4より OE = 2

従って，

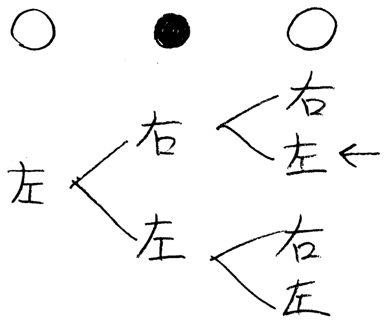
$DE=DO+OE$

$=8+2$

$=10$ 答

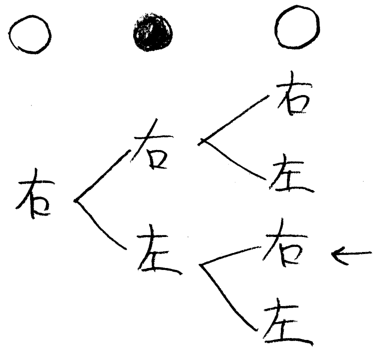
3 公立高校入試では樹形図がすべてです。
しっかり数え上げましょう.

(1) 仕切りの左,右に入るのを単に左,右で表します.



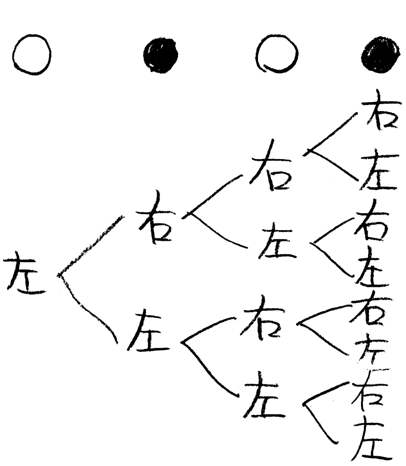
すべての場合の数は8通り.
白玉が接触するのは2通り.
よって,求める確率は

$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ 答

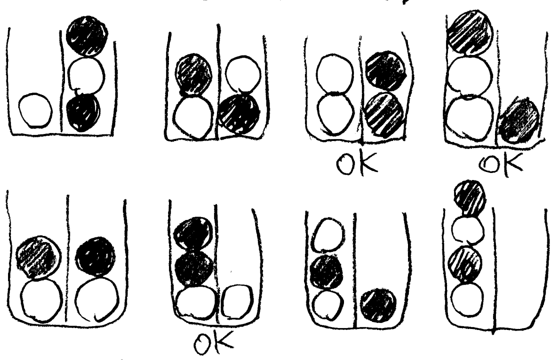


(最初の白玉が左に入った場合と,右に入った場合の場合の数は同じになります。次の4玉の場合に利用しましょう.)

(2)



樹形図だけではわかりにくいので図をかいてみましょう.



最初の○が右に入るときの場合の数は最初の○が左に入るときと同じである。

白玉と白玉の接触，または黒玉と黒玉の接解の少なくとも一方が

起こるのは $3 \times 2 = 6$ 通り.

すべての場合の数は $8 \times 2 = 16$ 通りであるから，求める確率は

$$\frac{6}{16} = \underline{\frac{3}{8}}$$ 答

4

(1) AD // BC だから錯角は等しい。

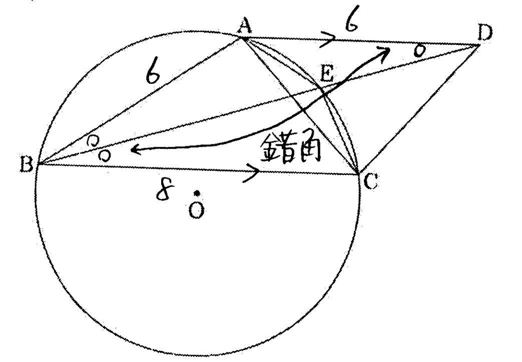
よって、∠ADB = ∠CBD

条件より ∠CBD = ∠ABD

従って、△ABD は AB = AD の二等辺三角形。

AD = AB = 6 (cm) 答

(図1)



AH = h (cm) とする.

四角形ABCD は台形だから、面積が $7\sqrt{11}$ cm² であるという条件より

$$\frac{1}{2}(6+8)\times h = 7\sqrt{11}$$

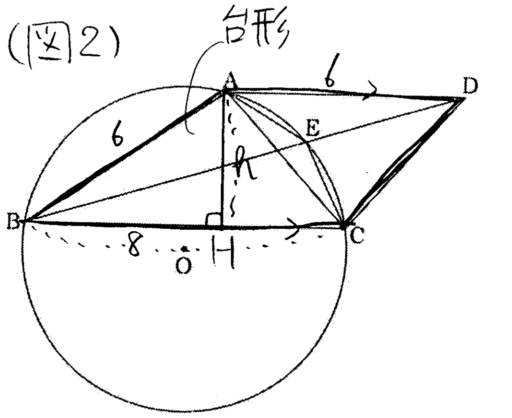
$$\frac{1}{2}\times 14\times h = 7\sqrt{11}$$

$$7h = 7\sqrt{11}$$

$$h = \sqrt{11}$$

よって、AH = $\sqrt{11}$ cm 答

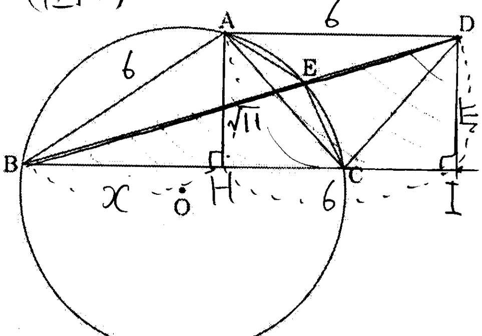
(図2)



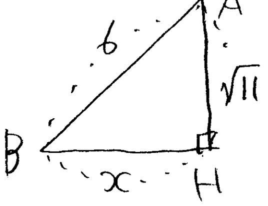
(2) 点Dから直線BCに垂線DIを下す.(図3)

[△BIDで三平方の定理が使えるように、BIの長さを求めよう。BI = BH + HI で、HI = AD なので(長方形!)、BHを求めればよい]

(図3)



ここで、△ABHで三平方の定理を使うと



(BH = x とする)

$$x^2 + (\sqrt{11})^2 = 6^2$$

$$x^2 + 11 = 36$$

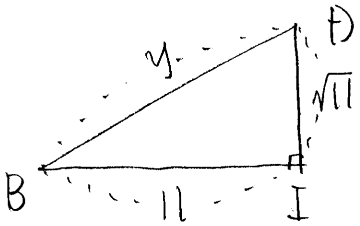
$$x^2 = 36 - 11$$

$$x^2 = 25$$

$x > 0$ より $x = 5$

よって、BH = 5

従って、BI = BH + HI = 5 + 6 = 11 (cm)



DI=AH=$\sqrt{11}$であるから、BD=y(cm)とおくと
△BIDで三平方の定理を適用することによって

$11^2+(\sqrt{11})^2=y^2$, $121+11=y^2$, $y^2=132=2^2\times3\times11$

2)132
2)66
3)33
11

$y>0$より $y=2\sqrt{33}$

よって、BD=$2\sqrt{33}$ (cm)

(3) 円周角の定理により、 (図4)

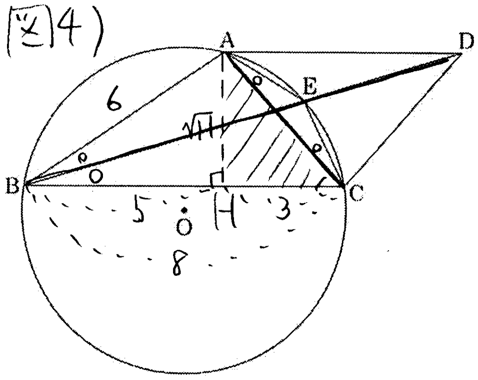
∠EAC=∠EBC, ∠ECA=∠ABE

∠EBC=∠ABE(仮定)により

∠EAC=∠ECA(=∠ABD)

よって、△EACはEA=ECの二等辺三角形。

(図4)



また、△ABDと△EACにおいて

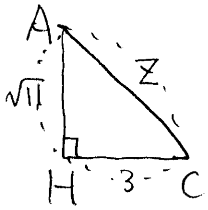
∠EAC=∠ABD, ∠ECA=∠ADB

2組の角がそれぞれ等しいので

△ABD∽△EAC

(相似な図形の面積比は相似比の2乗に比例するから、
△ABDと△EACの相似比(ここではBD:AC)を求めよう)

△AHCで AC=z(cm)とおくと、三平方の定理により



$z^2=(\sqrt{11})^2+3^2=11+9=20$

$z>0$より $z=2\sqrt{5}$

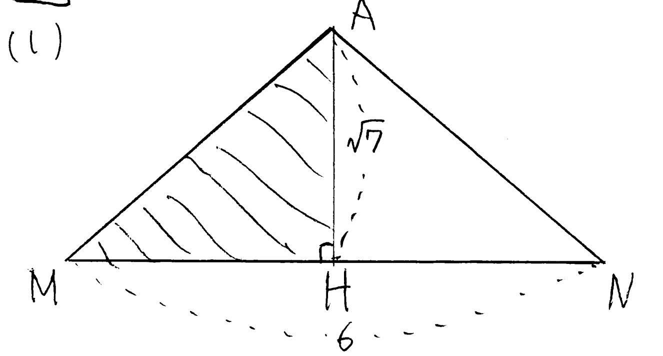
よって、AC=$2\sqrt{5}$ (cm)

2つの相似な三角形△ABDと△EACの面積の比は
相似比の2乗に比例するので、[対応する辺はBDとAC]

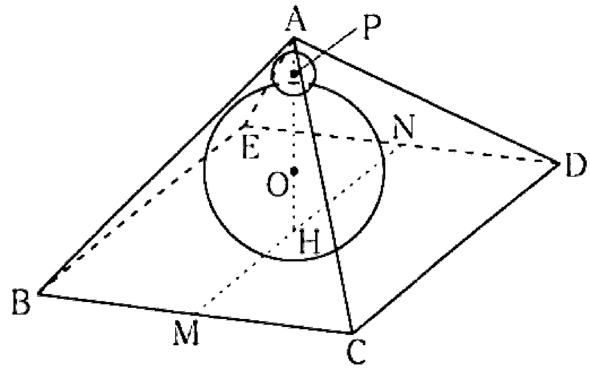
△ABD:△EAC=$BD^2:AC^2=(2\sqrt{33})^2:(2\sqrt{5})^2=132:20=$ 33:5 答

5

(1)



I図

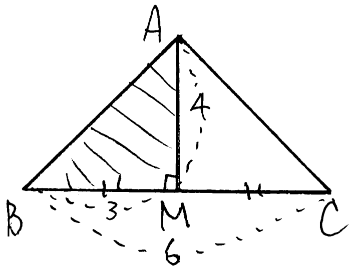


△AMHで三平方の定理を使うと

$AM^2 = MH^2 + AH^2 = 3^2 + (\sqrt{7})^2$

$= 9 + 7 = 16$

$AM > 0$ だから $AM = 4$



△ABMで三平方の定理を使って

$AB^2 = BM^2 + AM^2 = 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16 = 25$

$AB > 0$ だから $AB = \underline{5}$ (cm) 答

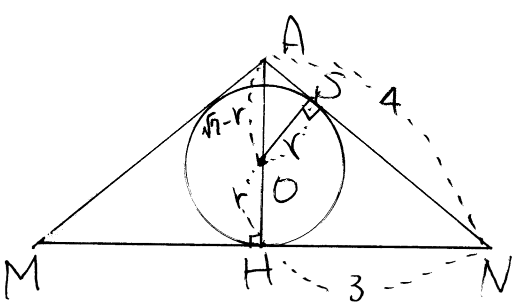
表面積は,

側面積が $4 \times \triangle ABC = 4 \times \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 48$ (cm^2)

底面積が $6 \times 6 = 36$ (cm^2)

だから, $48 + 36 = \underline{84}$ (cm^2) 答

(2)



点Oから直線ANに垂線OSを下す.

△AOSと△ANHにおいて

∠OAS = ∠NAH (共通)

∠ASO = ∠AHN = 90°

2組の角がそれぞれ等しいから

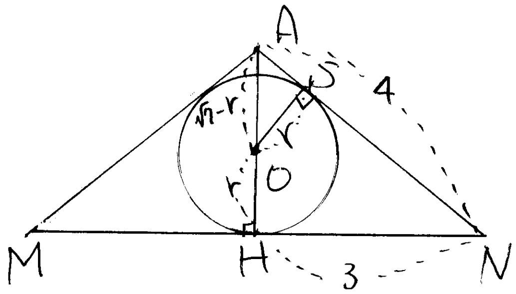
△AOS ∽ △ANH

対応する辺の比は等しいから

AO：AN＝OS：NH

ここで，OS＝r (cm)とおくと，OH＝OSより

$AO=AH-OH=AH-OS=\sqrt{7}-r$



よって，

$(\sqrt{7}-r):4=r:3$

$3(\sqrt{7}-r)=4r$

$3\sqrt{7}-3r=4r$

$4r=3\sqrt{7}-3r$

$7r=3\sqrt{7}$

$r=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ (cm) 答

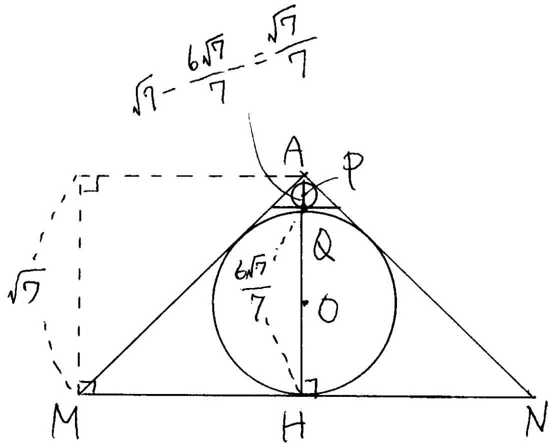
(3) 点Oを中心とする球と点Pを中心とする球は相似で，相似比は AH：AQ

$AH=\sqrt{7}$，$AQ=AH-QH=\sqrt{7}-2\times\dfrac{3\sqrt{7}}{7}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

よって，$AH:AQ=\sqrt{7}:\dfrac{\sqrt{7}}{7}=7:1$

よって，求める体積比は相似比の3乗に比例するから

$7^3:1^3=343:1$ 答



$\boxed{6}$

(1) タイルBの枚数は $0 \to 4 \to 4 \to 16 \to \cdots$
$(2^2)\ (2^2)\ (4^2)$

タイルA, タイルBを個別に見てみると,
タイルAは1辺が 1, 1, 3, 3, …の正方形,(枚数は2乗する)
タイルBは1辺が 0, 2, 2, 4, …の正方形(枚数は2乗する)
をそれぞれ作っている.
6番目のタイルBの枚数は $\underset{1}{0^2} \to \underset{2}{2^2} \to \underset{3}{2^2} \to \underset{4}{4^2} \to \underset{5}{4^2} \to \underset{6}{6^2}$ より

$6^2 = \underline{36\text{枚}}$ 答

	1	2	3	4	5	6	
タイルAの枚数…	$1^2\to$	$1^2\to$	$3^2\to$	$3^2\to$	$5^2\to$	$5^2\to$	…
+) タイルBの枚数…	$0^2\to$	$2^2\to$	$2^2\to$	$4^2\to$	$4^2\to$	$6^2\to$	…

$$\underset{1}{1^2+0^2} \to \underset{2}{1^2+2^2} \to \underset{3}{3^2+2^2} \to \underset{4}{3^2+4^2} \to \underset{5}{5^2+4^2} \to \underset{6}{5^2+6^2} \to \cdots$$

これを

$$\underset{1}{1^2+0^2} \to \underset{2}{2^2+1^2} \to \underset{3}{3^2+2^2} \to \underset{4}{4^2+3^2} \to \underset{5}{5^2+4^2} \to \underset{6}{6^2+5^2} \to \cdots \to \underset{n}{n^2+(n-1)^2}$$

と書き直すと, n番目の図形のタイルAとタイルBの枚数の合計は

$n^2+(n-1)^2 = n^2+(n^2-2n+1) = \underline{2n^2-2n+1}$ (枚) 答

(2) $2n^2-2n+1=1861$ を解けばよい.

$2n^2-2n+1-1861=0$

$2n^2-2n-1860=0$

両辺を2で割ると

$n^2-n-930=0$

(解き方は3通り)

解き方1. 因数分解

たして-1, かけて-930より 2数の差は1だから

$30\times30=900$より $30\times31=930$を発見

よって

$(n+30)(n-31)=0$

$n=-30, 31$

nは自然数だから $n=31$ ゆえに 31番目の図形 答

(以下略)

解き方2 解の公式

$a=1, b=-1, c=-930$を代入

$$n=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-930)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{1+3720}}{2}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{3721}}{2}$$

nは自然数だから, 絶対$\sqrt{\ }$がはずれるはず.

すなわち3721は 何かの整数の2乗になっている。3721に近い2乗の数を探すと

$60^2=3600$が見つかる。末尾が1なので

61^2を計算してみると3721.

$$\begin{array}{r} 61 \\ \times\ 61 \\ \hline 61 \\ 366 \\ \hline 3721 \end{array}$$

よって, $n=\frac{1\pm\sqrt{61^2}}{2}=\frac{1\pm61}{2}=\frac{1+61}{2}, \frac{1-61}{2}$

$$=\frac{62}{2}, -\frac{60}{2}=31, -30$$

よって, $n=31$

ゆえに, 31番目の図形 答

解き方3 ひらめき

$n^2-n-930=0$ を $n(n-1)=930$ と変形すると

左辺は連続する2つの自然数の積で，$30\times30=900$ を基準に

すると，$31\times30=930$ がわかる.

また，$n^2-n-930=0$ を満たす自然数 n は1つしかない.

よって，$n=31$

ゆえに，31番目の図形 答