平成27年度中期 数学解答

$\boxed{1}$

(1) $5\times(-4)^2-3^2$

$=5\times(-4)\times(-4)-3\times3$

$=5\times(+16)-9$

$=80-9$

$=\underline{71}$ 答

(2) $\dfrac{5x-3y}{3}-\dfrac{3x-7y}{4}$

(12で通分)

$=\dfrac{4(5x-3y)}{12}-\dfrac{3(3x-7y)}{12}$

$=\dfrac{4(5x-3y)-3(3x-7y)}{12}$

$=\dfrac{20x-12y-9x+21y}{12}$

$=\underline{\dfrac{11x+9y}{12}}$ 答

(3) $\sqrt{27}-\dfrac{12}{\sqrt{3}}-\sqrt{75}$

$=3\sqrt{3}-\dfrac{12\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-5\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}-\dfrac{12\sqrt{3}}{3}-5\sqrt{3}$

$=3\sqrt{3}-4\sqrt{3}-5\sqrt{3}$

$=\underline{-6\sqrt{3}}$ 答

(4) x^2-y^2

$=(x+y)(x-y)$

( )をつけて代入しよう

$=\{(\sqrt{7}+2)+(\sqrt{7}-2)\}$

$\times\{(\sqrt{7}+2)-(\sqrt{7}-2)\}$

$=2\sqrt{7}\times4$

$=\underline{8\sqrt{7}}$ 答

☆そのまま代入すると

$(\sqrt{7}+2)^2-(\sqrt{7}-2)^2$

$=\{(\sqrt{7})^2+2\times\sqrt{7}\times2+2^2\}$

$-\{(\sqrt{7})^2-2\times\sqrt{7}\times2+2^2\}$

$=(7+4\sqrt{7}+4)-(7-4\sqrt{7}+4)$

$=(11+4\sqrt{7})-(11-4\sqrt{7})$

$=11+4\sqrt{7}-11+4\sqrt{7}$

$=\underline{8\sqrt{7}}$

ちょっとしんどいわ。

(5) $2x+3y+6=0$

[$y=ax+b$ の形に戻す]

$3y=-2x-6$

$\boxed{1}$ (5)のつづき

$y=-\frac{2}{3}x-2$

切片-2より，y軸の-2を・

そこから，傾き$-\frac{2}{3}$より，

右に3，下に2

進んだところを・，さらに右に3，

下2を・，

また，切片から左に3，上に2

のところも・しておこう．

以上の・を通る直線を引こう．

☆ 代入法でいける．

$2x+3y+6=0$

$x=0$を代入すると

$3y+6=0$

$3y=-6$

$y=-2$

点$(0,-2)$を・

$y=0$を代入すると

$2x+6=0$

$2x=-6$

$x=-3$

点$(-3,0)$を・

2つの・を通る直線を引く．

(6) $(x-2)^2=6$

$x-2=\pm\sqrt{6}$

$x=2\pm\sqrt{6}$ 答

$x^2=\square$

$x=\pm\sqrt{\square}$

のパターン

(7)

＼	1	2	4	8	16	32
1	＼	○		○		○
2	○	＼	○		○	
4		○	＼	○		○
8	○		○	＼	○	
16		○		○	＼	○
32	○		○		○	＼

上の表より答えは

$\frac{3\times6}{30}=\frac{3}{5}$ 答

☆ $\boxed{(1,2)}$，$(1,4)$，$\boxed{(1,8)}$，$(1,16)$，$\boxed{(1,32)}$

$\boxed{(2,4)}$，$(2,8)$，$\boxed{(2,16)}$，$(2,32)$

$\boxed{(4,8)}$，$(4,16)$，$\boxed{(4,32)}$

$\boxed{(8,16)}$，$(8,32)$

$\boxed{(16,32)}$

上の表より答えは

$\frac{9}{5+4+3+2+1}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ 答

こっちの方がかんたんだ!!

(8) [比でいきましょう]

最初に箱の中にx個の白い玉が入っていたとする．

$(x+80):80=50:9$

$\boxed{1}$ (8)のつづき

$9(x+80)=80\times50$

$9x+9\times80=80\times50$

$9x=80\times50-9\times80$

$9x=80\times(50-9)$

$9x=80\times41$

$x=\dfrac{80\times41}{9}$

$x=\dfrac{3280}{9}$

$x=364.\cdots$

$41\times80=3280$

$3280\div9=364$ … （筆算: 27, 58, 54, 40, 36）

よって，およそ 360個

答えは (イ) 答

$\boxed{2}$

$$\begin{cases} x+y=19 & \boxed{ア} \quad \cdots\cdots ① \\ 162x+108y=2646 & \boxed{イ} \quad \cdots ② \end{cases}$$

②の左辺が

$3x+2y$

となるということだから，108を

2で割って $108=54\times2$.

よって，②の両辺を54で割ると

$2646\div54=49$ （筆算: 216, 486, 486, 0）

$3x+2y=49$ $\boxed{ウ}$ …②'

まとめると

$\boxed{ア}$ 19 $\boxed{イ}$ 2646 $\boxed{ウ}$ 49 答

(2) ①×3−②'より

①×3：$3x+3y=57$

−) ②'：$3x+2y=49$

$y=8$

①に代入して

$x+8=19$

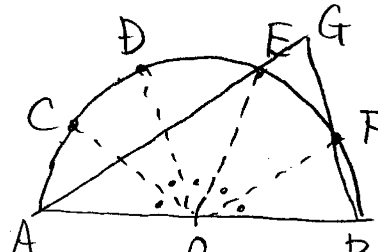
$x=19-8$

$x=11$

よって，ケーキ11個，プリン8個

答

$\boxed{3}$



$\angle BOE=\dfrac{180^\circ}{5}\times2=36^\circ\times2=72^\circ$

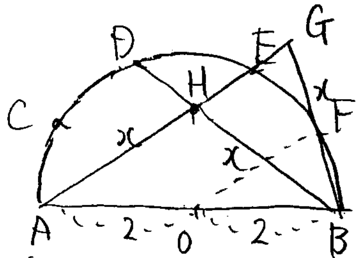
(円周角)$=\dfrac{1}{2}\times$(中心角)だから

$\angle BAE=\dfrac{1}{2}\angle BOE$

$\angle BAE=\dfrac{1}{2}\times72^\circ$

$\angle BAE=36^\circ$ 答

3 (∠AGBは直接にはわからないので、△AGBで180°から∠GAB



(=∠EAB)と∠GBA(=∠ABF)を引いてみよう。

$\angle ABF = \frac{1}{2} \times \angle AOF$

$= \frac{1}{2} \times \frac{180^\circ}{5} \times 4$

$= \frac{1}{2} \times 36^\circ \times 4$

$= 72^\circ$

よって、

$\angle AGB = 180^\circ - (\angle GAB + \angle ABG)$

$= 180^\circ - (\angle EAB + \angle ABF)$

$= 180^\circ - (36^\circ + 72^\circ)$

$= 180^\circ - 108^\circ$

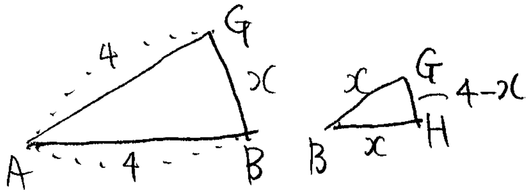
$\angle AGB = \underline{72^\circ}$ 答

(2) $\angle HBG = 36^\circ$, $\angle BGH = 72^\circ$ より、2組の角がそれぞれ等しいから △ABG∽△BHG

また、△ABGは∠ABG=∠AGB=72°の2等辺三角形、また△BHGも二等辺三角形である。

すなわち AB=AG, BH=BG である。

AH=x(cm)とすると、△AHBも



AH=BHの二等辺三角形だから BH=x(cm). また HG=AG−AH

$= 4 - x$ (cm)

よって

AB : BH = BG : HG

$4 : x = x : (4-x)$

$x^2 = 4(4-x)$

$x^2 = 16 - 4x$

$x^2 + 4x - 16 = 0$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times (-16)}}{2 \times 1}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{16+64}}{2}$

$= \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2}$

$= \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2}$

$= -2 \pm 2\sqrt{5}$

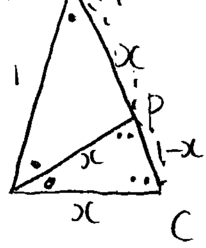
$x > 0$ より

$x = -2 + 2\sqrt{5}$

よって、AH = $\underline{-2+2\sqrt{5}}$ (cm)

☆これはよくあるパターンで

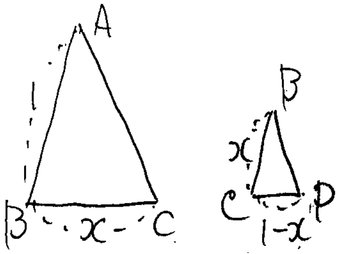
•は36°



AB=1, BC=x とすると

△ABC∽△BCP より

$\boxed{3}$ のつづき



$AB:BC=BC:CP$

$1:x=x:1-x$

$x^2=1-x$

$x^2+x-1=0$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-4\times1\times(-1)}}{2\times1}$

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

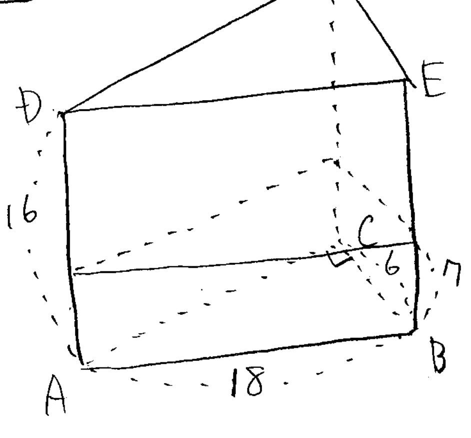
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ より

$x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

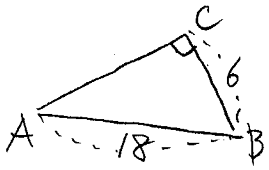
となります。本問では $AB=4$ なのでこれの4倍になっています。

$\boxed{4}$



(1) [ACを求める]

△ABCで三平方の定理を用いて



$AC^2+BC^2=AB^2$

$AC^2+6^2=18^2$

$AC^2=18^2-6^2$

$AC^2=(18+6)(18-6)$　　ふつうに $324-36$ でもOK

$AC^2=24\times12$

$AC^2=2^3\times3\times2^2\times3$

$AC>0$ より $AC=4\times3\times\sqrt{2}=12\sqrt{2}$ (cm)

よって,水の体積は

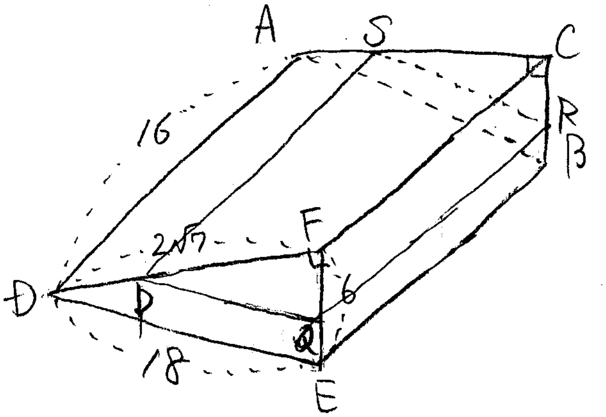
[三角柱なので底面×高さ]

$\triangle ABC\times7$

$=\frac{1}{2}\times12\sqrt{2}\times6\times7$

$=252\sqrt{2}$ (cm³) $\boxed{答}$

(2)



水面と各辺との交点を上の図のように設定する。△DEF∽△PQEだから,△DEFと△PQE

$\boxed{4}$ (2)のつづき.

の相似比を求めよう.

まず, 三角柱ABC−DEFと三角柱SRC−PQFの体積比は, (図1)の三角柱ABC−DEFと水の入っていない方の三角柱の体積比に等しい.

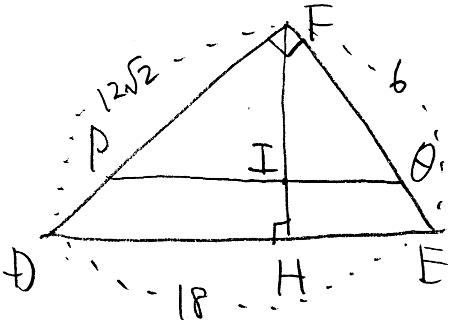
よって, 体積比は

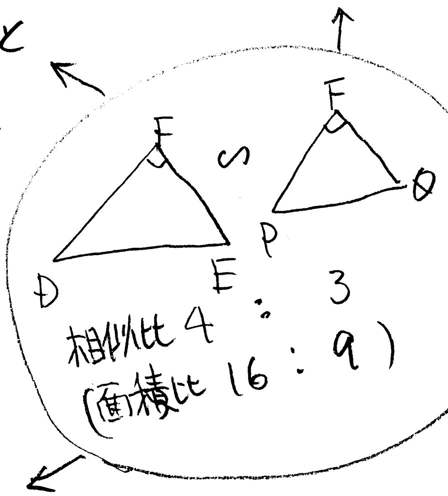
$16 : (16-7) = 16 : 9$

従って, △DEF : △PQE $= 16 : 9$

面積比は相似比の2乗に比例しているから, △DEFと△PQEの相似比は $\sqrt{16} : \sqrt{9} = 4 : 3$

よって, △DEFで点Fから辺DEに垂線FHを下し, 垂線FHと直線PQとの交点をIとする.





［IHの長さを求めるのが目標］

△DEF∽△FEHより

DE : FE = DF : FH

よって, $18 : 6 = 12\sqrt{2} : FH$

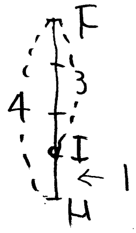
$3 : 1$

$3FH = 12\sqrt{2}$

$FH = 4\sqrt{2}$

従って, $FH : FI = 4 : 3$ より

$FH : IH = 3 : 1$



ゆえに, 答えは

$4\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = \sqrt{2}$ cm

$\boxed{答}$

(注) 日本語の説明が多くなりました。

体積比 → 面積比 → 相似比

の流れをつかんでください.

4 (2)のつづき

☆ FIの求め方は秘テクがある.

面積を2通りに表して, ＝(イコール)にする.

△DEFで底辺をDF, 高さをFEとすると,

$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{2} \times 6 = 36\sqrt{2}$ …Ⓐ

DEを底辺, FIを高さとすると

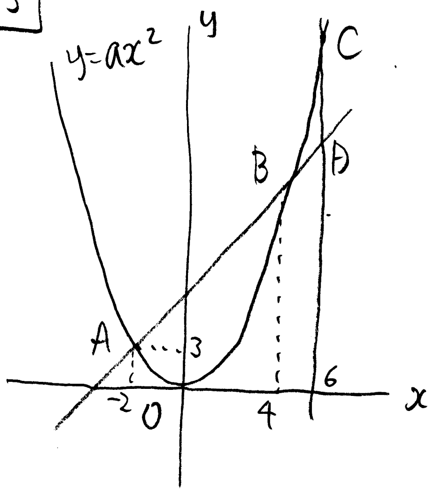
$\triangle DEF = \frac{1}{2} \times 18 \times FI = 9FI$ …Ⓑ

Ⓑ＝Ⓐより

$9FI = 36\sqrt{2}$

$FI = 4\sqrt{2}$ (cm)

5



(1) $y = ax^2$は点A(−2, 3)を通るので.

$3 = a \times (-2)^2$, $3 = 4a$,

$4a = 3$, $a = \frac{3}{4}$ 答

$\boxed{5}$ (1)のつづき

$y=\frac{3}{4}x^2$ に $x=4,\ 6$ を代入して

点B, Cのy座標を求めよう。

$y=\frac{3}{4}\times4^2=\frac{3}{4}\times\cancel{4}\times4$

$y=12$

よって、B(4, 12)

$y=\frac{3}{\cancel{4}_2}\times6^2=\frac{3}{\cancel{4}_2}\times\cancel{6}^3\times\cancel{6}^3$

$y=27$

よって、C(6, 27)

x	A -2	B 4
y	3	12

直線ABの方程式を求めよう。

傾き $\frac{12-3}{4-(-2)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$

$y=\frac{3}{2}x+b$ とおく。

点A(−2, 3)を通るから

$3=\frac{3}{2}\times(-2)+b$

$\frac{3}{2}\times(-2)+b=3$

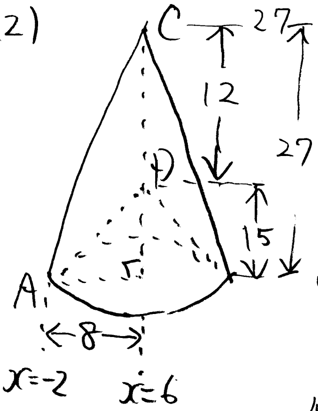
$-3+b=3$

$b=3+3$

$b=6$

よって、$y=\frac{3}{2}x+6$ 答

(2)



題意の立体の体積は、Cを頂点とする円錐の体積から、

点Dを頂点とする円錐の体積を引いたものである。Dのy座標は、$y=\frac{3}{2}\times6+6=9+6=15$.

よって、答えは

$\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times27-\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times15$

同じなのでくくる

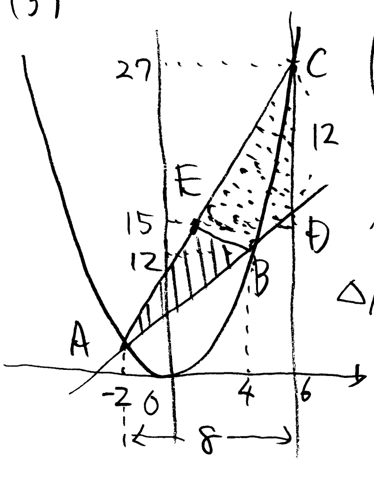
$=\frac{1}{3}\times\pi\times8^2\times(27-15)$

$=\frac{1}{\cancel{3}_1}\times\pi\times8^2\times\cancel{12}^4$

$=\pi\times64\times4$

$=256\pi\ (cm^3)$

(3)



(条件を言いかえよう。)

与えられた条件は

△ABE:△ADC = 3:8

と言いかえら

$\boxed{5}$ (3) のつづき

る. 〔$y=\frac{3}{2}x+6$ に $x=6$ を代入して 点Dのy座標求めておこう〕

$\triangle ACD = \frac{1}{2}\times 12\times 8 = 48$ より

$\triangle ABE = \frac{3}{8}\times\triangle ACD$

$= \frac{3}{8}\times 48 = 18$

（点Eの座標を求めるため，直線ACの方程式を求めよう）

	A	C
x	-2	6
y	3	27

直線ACの傾きは

$\frac{27-3}{6-(-2)} = \frac{24}{8} = 3$

$y=3x+b$ とおく. 点A$(-2,3)$を通るから

$3 = 3\times(-2)+b$

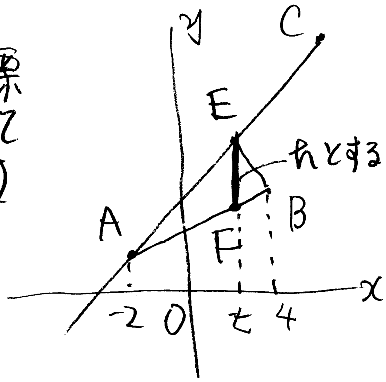
$3\times(-2)+b=3$

$-6+b=3$

$b=3+6$

$b=9$

よって, $y=3x+9$



点Eの座標を$(t, 3t+9)$とすると

$\triangle ABE = \frac{1}{2}\times h\times$（2点A, Bのx座標の差）

$18 = \frac{1}{2}\times h\times(4-(-2))$

$\frac{1}{2}\times h\times(4-(-2)) = 18$

$\frac{1}{\cancel{2}}\times h\times\overset{3}{\cancel{6}} = 18$

$h = \frac{18}{3}$

$h = 6$

$\triangle AEF \backsim \triangle ACD$ であり,

$h(=EF):CD = 6:12 = 1:2$

よって, $AE:EC = 1:1$

つまり, 点Eは線分ACの中点（真ん中）である. （たして2で割る）

よって,

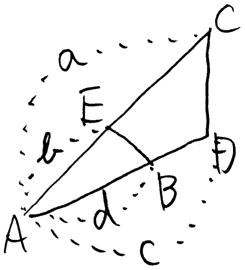
$E\left(\frac{-2+6}{2}, \frac{3+27}{2}\right)$

$x=2$が出たら, $y=3x+9$に代入してもよい.

つまり

$E(2, 15)$ 答

$\boxed{5}$ (3)の秘策



$$\triangle ABE = \frac{b}{a} \times \frac{d}{c} \times \triangle ACD$$

を使えばあっという間に解決

本問では $c:d=8:6=4:3$

よって、$\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \boxed{\frac{b}{a}} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$

このまま

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{3}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$

よって、$a:b=2:1$ より

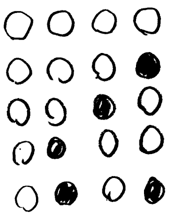
$AE:EC=1:1$.

点Eが線分ACの中点だと分かります。

$\boxed{6}$

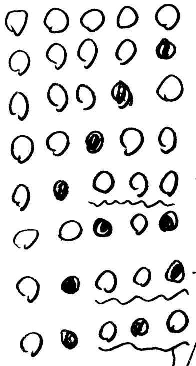
(1)（とりあえず図をかいてみましょう）

$n=4$ のとき



左のようになるから 5通り 答

(2) $n=5$ のとき



左のようになるから、答えは 8通り 答

左端から○● となるのは 3通り。答

（これは $n=3$ のときの並べ方と同じ）

(3) $n=5$ のとき、左端から○○となるのは $8-3=5$ 通りあるが、この並べ方は $n=4$ の並べ方の左端に○をくっつけた並べ方に等しい。

よって、

($n=5$ の並べ方)=($n=3$ の並べ方)
+($n=4$ の並べ方)

従って、並べ方の総数は、前の2つを足せばよいから、順に計算していくと

$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
1	2	3	5	8
$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
13	21	34	55	89
$n=11$				
144				

よって、答えは $n=11$ 答

（以上）