この解答は一個人による試みですので，参考程度にご利用ください。間違いがたくさんあると思いますが，考え方はたいてい合っていると思います(笑) 問題そのものは https://suugaku.jp/kako/gihuyakka/ を参照。

No.

Date 2015 ①

2015

1

(1) $\overrightarrow{OA} // \overrightarrow{OB}$ で $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の向きは逆なので，

$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$ … ①

をみたす実数 $k(<0)$ が存在する.

[①を成分で表す]

$(x, y) = k(X, Y)$

$\therefore x = kX,\ y = kY$

$OA \cdot OB = 4$ より

$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{X^2+Y^2} = 4$

$\sqrt{(kX)^2+(kY)^2}\cdot\sqrt{X^2+Y^2} = 4$

$\sqrt{k^2(X^2+Y^2)}\sqrt{X^2+Y^2} = 4$

$\sqrt{k^2(X^2+Y^2)^2} = 4$

$|k(X^2+Y^2)| = 4$

$k<0,\ X^2+Y^2>0$ だから

$(\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$ より$)$

$-k(X^2+Y^2) = 4$

[ $A \leqq 0$ のとき $|A| = -A$ ]

$\therefore k = -\dfrac{4}{X^2+Y^2}$

よって，$(x, y) = \left(-\dfrac{4X}{X^2+Y^2},\ -\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}\right)$

(2) (1)の $x, y$ を $y = -2x-2$ に代入しよう.

$-\dfrac{4Y}{X^2+Y^2} = -2\cdot\dfrac{-4X}{X^2+Y^2} - 2$

$X^2+Y^2$ をかけて分母を払うと

$-4Y = 8X - 2(X^2+Y^2)$

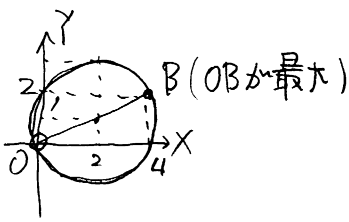
$\therefore 2(X^2+Y^2) - 8X - 4Y = 0$

$\div 2$ $X^2+Y^2-4X-2Y=0$

$(X-2)^2+(Y-1)^2 = 2^2+1^2 = 5$

$(X, Y) \neq (0, 0)$ より

点Bの軌跡は，中心 $(2, 1)$，半径 $\sqrt{5}$ の円の原点を除いた部分である




(3) $\sqrt{\ }$ が書きにくいので2乗して考えます.

$\dfrac{OB^2}{AB^2} = \dfrac{X^2+Y^2}{\left(X-\dfrac{-4X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(Y-\dfrac{-4Y}{X^2+Y^2}\right)^2}$

$= \dfrac{X^2+Y^2}{\left(X+\dfrac{4X}{X^2+Y^2}\right)^2+\left(Y+\dfrac{4Y}{X^2+Y^2}\right)^2}$

No.
Date



$$= \frac{X^2+Y^2}{\left\{X\left(1+\frac{4}{X^2+Y^2}\right)\right\}^2+\left\{Y\left(1+\frac{4}{X^2+Y^2}\right)\right\}^2}$$

$$= \frac{X^2+Y^2}{X^2\left(1+\frac{4}{X^2+Y^2}\right)^2+Y^2\left(1+\frac{4}{X^2+Y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{\cancel{X^2+Y^2}}{\cancel{(X^2+Y^2)}\left(1+\frac{4}{X^2+Y^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{4}{X^2+Y^2}\right)^2}$$

(ここでストップ)

$\frac{OB}{AB}$が最大 $\Leftrightarrow$ $1+\frac{4}{X^2+Y^2}$が最小

$\Leftrightarrow$ $X^2+Y^2$が最大

である. $X^2+Y^2$は原点とBの距離の2乗であるから (2)の図より

$(X,Y)=(4,2)$で $\frac{OB}{AB}$は最大値をとる.

よって, $\underline{B(4,2)}$,

$A\left(-\frac{-4\cdot 4}{4^2+2^2}, -\frac{-4\cdot 2}{4^2+2^2}\right)$

つまり $\underline{A\left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)}$

$\boxed{2}$ Xにかかっている事象をX, 陽性と診断される事象をMとする.

$P(X)=\frac{4}{100}$, $P(X\cap M)=\frac{80}{100}$

$P(\overline{X}\cap M)=\frac{10}{100}$

(1) ある人が陽性と判定される確率は

$$P(M)=P(X\cap M)+P(\overline{X}\cap M)$$
$$=\frac{4}{100}\times\frac{80}{100}+\frac{96}{100}\times\frac{10}{100}$$
$$=\underbrace{\frac{1}{25}\times\frac{8}{10}}+\frac{24}{25}\times\frac{1}{10} \cdots ①$$
$$=\frac{32}{25\times 10}=\frac{16}{25\times 5}=\frac{16}{125}$$

| | 感染 | 非感染 | |
|---|---|---|---|
| 陽性 | $\frac{80}{100}$ | $\frac{10}{100}$ | ← $\frac{4}{100}$ |
| 陰性 | $\frac{20}{100}$ | $\frac{90}{100}$ | ← $\frac{96}{100}$ |

よって答えは $\frac{①の\sim}{P(M)}=\frac{\frac{4}{25\times 5}}{\frac{16}{125}}=\underline{\frac{1}{4}}$

(2) 陰性と判定される確率は

$$P(X\cap\overline{M})+P(\overline{X}\cap\overline{M})$$
$$=\underbrace{\frac{4}{100}\times\frac{20}{100}}+\frac{96}{100}\times\frac{90}{100}$$
$$=\frac{1}{25}\times\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{10}_{5}}+\frac{\cancel{24}^{12}}{25}\times\frac{9}{\cancel{10}_{5}}=\frac{109}{125} \cdots ②$$

よって, 答えは

$$\frac{②の\sim}{②}=\frac{\frac{1}{125}}{\frac{109}{125}}=\frac{1}{109}_{//}$$

3 (これは悪問です。) 正五角形の中心をOとするとき $\angle AOB=72^\circ$, $\angle ADB=36^\circ$ (円周角=中心角$\times\frac{1}{2}$) なので, 正弦定理より, $OA=R$とすると,

$$\frac{\overset{\swarrow 1}{AB}}{\sin 36^\circ}=2R \Leftrightarrow \frac{1}{\sin 36^\circ}=2R$$

よって, 正五角形の面積を$S$とすると

$$S=5\times\triangle OAB=5\times\frac{1}{2}\times R^2\times\sin 72^\circ$$

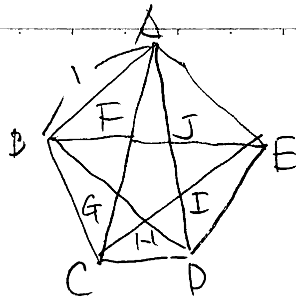
$$=5\times\frac{1}{2}\times\frac{\sin 72^\circ}{4\sin^2 36^\circ}$$

$\sin^2 36^\circ=\dfrac{1-\cos 72^\circ}{2}$ なので

$$S=\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{4}\times\frac{\sin 72^\circ}{\frac{1-\cos 72^\circ}{2}}=\frac{5}{4}\times\frac{\sin 72^\circ}{1-\cos 72^\circ}$$

(ここで, いったんストップ)

次は対角線の長さ (ここではAC) を求めます。中学以来定番の方法です.




$AC=x$とおくと $\triangle ABG \backsim \triangle ACD$ (角を計算していくと分かります.) より,

$AB:AC=BG:CD$

($BD=x$, $DG=1$なので)

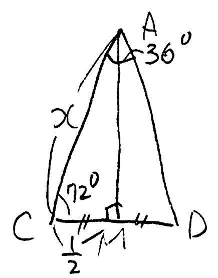
$$1:x=(x-1):1$$

$$x(x-1)=1$$

$$x^2-x-1=0$$

$x>0$より $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\triangle ACD$に着目します。CDの中点をMとします。




三平方の定理より

$$AM=\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}$$

よって $\sin 72^\circ=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}}{x}$

$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$$

$$\cos 72^\circ=\frac{CM}{AC}=\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}}_{\frac{1}{2x}}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}$$

従って，正五角形ABCDの面積は

$$S=\frac{5}{4}\cdot\frac{\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}}{1+\frac{1}{1+\sqrt{5}}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{5\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4(2+\sqrt{5})}$$

となります。これを書き続けるのはしんどいので，AC$=x$のまま，つまり，$x$を使って表すことにします。

$\triangle AFJ \backsim \triangle ACD$で相似比は

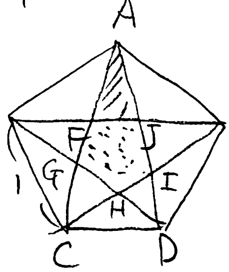
$$FJ:CD=(1+1-x):1=2-x:1$$

よって，面積比は $(2-x)^2:1$

$\triangle AFJ=T$ とおると

$$\triangle ACD=\frac{1}{(2-x)^2}T$$

また $GH:HD=(2-x):x-1$




よって，

$$\triangle CHD=\frac{x-1}{2-x}\triangle CGH=\frac{x-1}{2-x}\triangle AFJ$$

$$=\frac{x-1}{2-x}T\ (\because \triangle CGH\equiv\triangle AFJ)$$

よって，五角形FGHIJの面積をUとすると

$$U=\triangle ACD-(\triangle AFJ+\triangle CGH+\triangle DHI+\triangle CHD)$$

$$=\frac{1}{(2-x)^2}T-\left(3T+\frac{x-1}{2-x}T\right)$$

ここで，$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，

$$2-x=2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$(2-x)^2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

$$x-1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ より

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\frac{2}{7-3\sqrt{5}}=\frac{2(7+3\sqrt{5})}{49-45}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{x-1}{2-x}=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{9-5}$$

$$=\frac{2+2\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

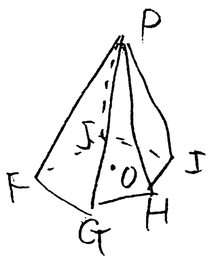
よって，$U=\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}-3-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)T$

$$=\frac{7+3\sqrt{5}-6-1-\sqrt{5}}{2}\cdot T$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{2}T=\sqrt{5}T$$

よって，答えは $\sqrt{5}$倍

(2) 五角形FGHIJを底面とする五角錐の頂点をPとする




(Oは正五角形FGHIJの中心)

$PO^2=PF^2-FO^2$ で，

$PF=AF=x-1,\ OF=(2-x)OA$

[正五角形ABCDEと正五角形FGHIJの相似比は

$AB : FJ = 1 : (2-x)$

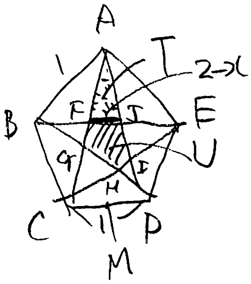
よって、

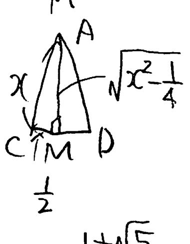
$OF = (2-x)\,OA$

従って、

$$OP^2 = AF^2 - OF^2$$
$$= (x-1)^2 - (2-x)^2 OA^2$$
$$= (x-1)^2 - (2-x)^2 R^2$$ [解答の冒頭!]
$$= (x-1)^2 - (2-x)^2 \cdot \frac{1}{4\sin^2 36^\circ}$$
$$= (x-1)^2 - (2-x)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \frac{1-\cos 72^\circ}{2}}$$
$$= (x-1)^2 - (2-x)^2 \cdot \frac{1}{2\left(1-\frac{1}{2x}\right)}$$
$$= (x-1)^2 - (2-x)^2 \cdot \frac{x}{2x-1}$$

$$(x-1)^2 = \left(\frac{\sqrt5-1}{2}\right)^2 = \frac{3-\sqrt5}{2}$$
$$(2-x)^2 = \frac{7-3\sqrt5}{2}$$
$$2x-1 = 2\cdot\frac{1+\sqrt5}{2} - 1 = \sqrt5$$




$x = \frac{1+\sqrt5}{2}$

よって、

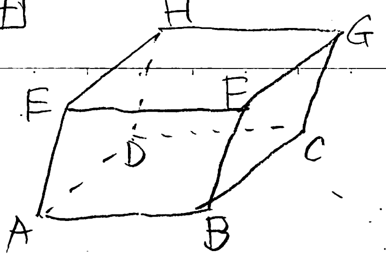
$$OP^2 = \frac{3-\sqrt5}{2} - \frac{7-3\sqrt5}{2} \cdot \frac{\frac{1+\sqrt5}{2}}{\sqrt5}$$
$$= \frac{3-\sqrt5}{2} - \frac{7-3\sqrt5}{2} \cdot \frac{\sqrt5+5}{2\cdot 5}$$
$$= \frac{3-\sqrt5}{2} - \frac{\cancel{20}^{5} - \cancel{8}^{2}\sqrt5}{\cancel{20}_{5}}$$
$$= \frac{15-5\sqrt5}{10} - \frac{10-4\sqrt5}{10} = \frac{5-\sqrt5}{10}$$

よって $OP = \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$

従って、求める体積は

$$\frac13 \times U \times OP$$
$$= \frac13 \times \sqrt5\, T \times OP$$
$$= \frac13 \times \sqrt5\,(2-x)^2 \triangle ACD \times OP$$
$$= \frac13 \times \sqrt5 \times \frac{7-3\sqrt5}{2} \times \frac12 \times 1 \times AM \times OP$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{12} \times \sqrt{x^2-\frac14} \times OP$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{12} \times \frac{\sqrt{5+2\sqrt5}}{2} \times \sqrt{\frac{5-\sqrt5}{10}}$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{24} \times \sqrt{\frac{(5+2\sqrt5)(5-\sqrt5)}{10}}$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{24} \times \sqrt{\frac{15+5\sqrt5}{10}}$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{24} \times \sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}}$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{24} \times \sqrt{\frac{6+2\sqrt5}{4}}$$
$$= \frac{7\sqrt5-15}{24} \times \frac{\sqrt5+1}{2}$$
$$= \frac{20-8\sqrt5}{48} = \frac{5-2\sqrt5}{12}$$

4




右欄の②に「$0 \leqq k \leqq 1$より$l, m, n$はいずれも$-1$以下あるいは0以上」を追加してください。

(1) $l\overrightarrow{PB}+m\overrightarrow{PD}+n\overrightarrow{PE}=\overrightarrow{GP}$

始点Aにかえます。(Pは正体不明)

$l(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+m(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AP})+n(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AP})$
$=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AG}$

$\therefore l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}=(l+m+n+1)\overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FG}$
$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$

より

$l\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$
$=(l+m+n+1)\overrightarrow{AP}$

従って、

$$\overrightarrow{AP}=\frac{l+1}{l+m+n+1}\overrightarrow{AB}+\frac{m+1}{l+m+n+1}\overrightarrow{AD}+\frac{n+1}{l+m+n+1}\overrightarrow{AE} \cdots ①$$

(2) 条件より $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AG}$をみたす実数$k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$が存在する

$\overrightarrow{AP}=k(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})$
$=k\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AD}+k\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$は1次独立だから、

①と比較して

$$\frac{l+1}{l+m+n+1}=k,\ \frac{m+1}{l+m+n+1}=k,\ \frac{n+1}{l+m+n+1}=k$$

よって、

$l+1=m+1=n+1=k(l+m+n+1)$

$\therefore l=m=n$ $\left(k=\frac{l+1}{3l+1}\right) \cdots ②$

(3) (公式で $x+y+z=1$ ですが、分からないふりをして求めます!)

条件より $\overrightarrow{BQ}=s\overrightarrow{BD}+t\overrightarrow{BE}$をみたす実数$s, t$が存在する

始点をAにかえて

$\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=s(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})+t(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})$

$\therefore \overrightarrow{AQ}=(1-s-t)\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AD}+t\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$は1次独立だから

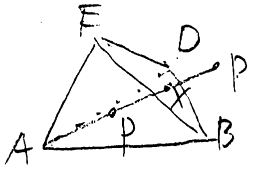
$\overrightarrow{AQ}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AE}$と比較して

$x=1-s-t,\ y=s,\ z=t$

辺々加えて

$x+y+z=1$

(4) 直線APと平面BDEとの交点をXとする。$\overrightarrow{AP}=u\overrightarrow{AX}$ ($u$は実数)とする



以下，X を (3) の Q としてよい．

すると

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ または $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}$

(i) $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ のとき

$$\frac{l+1}{l+m+n+1}\overrightarrow{AB}+\frac{m+1}{l+m+n+1}\overrightarrow{AD}+\frac{n+1}{l+m+n+1}\overrightarrow{AE}$$

$$=\frac{1}{2}(x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}+z\overrightarrow{AE})$$

よって，$\frac{l+1}{l+m+n+1}=\frac{1}{2}x$，$\frac{m+1}{l+m+n+1}=\frac{1}{2}y$，

$$\frac{n+1}{l+m+n+1}=\frac{1}{2}z$$

辺々加えると

$$\frac{l+m+n+3}{l+m+n+1}=\frac{1}{2}(x+y+z)=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ 2(l+m+n+3)=l+m+n+1$

$\therefore\ \underline{l+m+n=-5}$

(ii) $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AQ}$ のとき (i) と同様にして

$\underline{l+m+n=3}$

また，$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AG}\ (0\leqq k\leqq 1)$ のとき

(2) より $l=m=n$，$k=\frac{l+1}{3l+1}$

$l+m+n=-5$ のとき，$l=m=n=-\frac{5}{3}$

このとき $k=\frac{-\frac{2}{3}}{-5+1}=\frac{1}{6}$

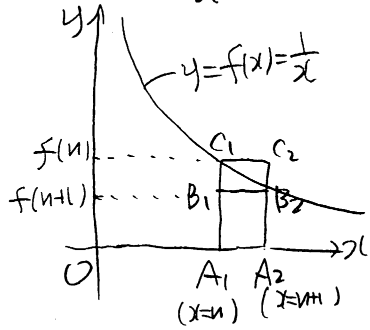
$l+m+n=3$ のとき　$l=m=n=1$

このとき $k=\frac{1+1}{3+1}=\frac{1}{2}$

よって，以上から　$\underline{l=m=n=-\frac{5}{3},\ \frac{1}{2}}$

$\boxed{5}$ (1)（面積で攻めます．）

$f(x)=\frac{1}{x}$ とおく，次の図で




長方形 $A_1A_2B_2B_1$ < 図形 $A_1A_2B_2C_1$ < 長方形 $A_1A_2C_1C_2$ が成り立つから

$$1\cdot f(n+1)<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<1\cdot f(n)$$

$$\therefore\ \frac{1}{n+1}<\Big[\log|x|\Big]_n^{n+1}<\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{n+1}<\log\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{n+1}<\log\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$$

よって，成り立つ．

(2)（$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$ は

$0<p\leqq 1$ のとき $\infty$ に発散，

$1<p$ のとき収束することが

知られています。本問では (1)

の右側の不等号を利用します。）

(1) の右側の不等号について

$n$に$1,2,3,\cdots,n$を代入して，辺々加える。

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right) < \frac{1}{1}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+)\ \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$< 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

この左辺は，$\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\log(k+1)-\log k$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\} = \log(n+1)-1$$

$$\therefore\ \log(n+1)-1 < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\{\log(n+1)-1\}=\infty$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\infty$

(3) (1)の不等式で，$n$に$n, n+1, \cdots, n+n$を代入して辺々加える。

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+2} < \log\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \frac{1}{n+1}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+)\ \frac{1}{n+n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n+n}\right) < \frac{1}{n+n}$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$< \log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

$$< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

第2辺は(2)と同様に考えて

$$\sum_{k=n}^{2n}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=n}^{2n}\{\log(k+1)-\log k\}$$

$$=\log(2n+1)-\log n=\log\frac{2n+1}{n}$$

$$=\log\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

よって，

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1} < \log\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

$$< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

($\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$ を主人公にする)

$$\log\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n} < \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$< \log\left(2+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2n+1}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$(第1辺)$=\log 2$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$(第3辺)$=\log 2$

よって，ハサミウチの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\log 2$$

(4) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ の形をつくります。

↓

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$=\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}+\frac{1}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}+\cdots+\frac{1}{n\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

($\frac{1}{n}$でくくります。)

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$$

（$\frac{k}{n}$を$x$とみて，）

$f(x)$に$\frac{1}{1+x}$とすると

（　）の中は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$=\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$=\left[\log(1+x)\right]_0^1$$

$$=\log 2-\log 1$$

$$=\underline{\log 2}$$

(5)（マイナスがあっては，仕事になりません。いったんマイナスを消します．すると）

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\right.$$

上に続く

$$\left.\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

従って，答えは $\underline{\log 2}$

（以上）

☆全般的に標準ですが，$\boxed{3}$は計算力のみをためそうという愚問です．やさしいですが，試験場では捨てましょう。問題量が多いので，5割いけば楽勝で合格するはず（共通テスト次第ですが…）．