数学・全国大学入試めぐり第１回

同志社大学・理系

2月4日実施

数学I・数学II・数学III・数学A・数学B(「数列」)・数学C(「ベクトル」「平面上の曲線と複素数平面」)（100分・200点）

1 次の $\boxed{}$ に適する数または式を，解答用紙の同じ記号のついた $\boxed{}$ の中に記入せよ．

(1) 袋Aには白玉2個，赤玉4個が，袋Bには白玉3個，赤玉2個がそれぞれ入っている．袋A，Bに対して，「1個のさいころを投げて，1か2の目が出れば袋Aを，他の目が出れば袋Bを選び，選んだ袋から玉を1個取り出して，取り出した玉はどちらの袋にも戻さない」という試行を，どちらかの袋の玉がすべてなくなるまで繰り返す．このとき，1回目の試行で袋Aから白玉を取り出す確率は $\boxed{ア}$，1回目の試行で白玉を取り出す確率は $\boxed{イ}$．1回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき，選ばれた袋がAである確率は $\boxed{ウ}$．2回目の試行で取り出した玉が赤玉であるとき，1回目の試行で取り出した玉も赤玉である確率は $\boxed{エ}$．袋Bより先に袋Aの玉がすべてなくなる確率は $\boxed{オ}$．

(2) 原点をOとする座標空間内の2点を $A(6\sqrt{3}, 3\sqrt{3}-25, 3\sqrt{3}+26)$, $B(2, 3\sqrt{3}+27, 3\sqrt{3}-26)$ とすると，$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = 24\times\left(\boxed{カ}\right)$．2点A，Bを通る直線を ℓ とすると，原点Oから直線 ℓ に垂線OHを下ろしたときの点Hの z 座標は $\boxed{キ}$．r を正の実数とし，中心が点H，半径が r の球面を S_r とし，中心が点 $C(1, 1, 0)$，半径が3の球面を T とする．2つの球面 S_r, T が1点のみを共有するような r の値のうち，最大のものを r_0 とすると，$r_0 = \boxed{ク}$．S_{r_0} と T の共有点をPとすると，点Pの z 座標は $\boxed{ケ}$．S_{r_0} が xy 平面と交わってできる円の半径は $\boxed{コ}$．

2 n を自然数とする．数列 a_n, b_n を次の関係式で定める．

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{10(9-n)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = a_{n+1} + \frac{9-n}{n+1}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問に答えよ．ただし，必要であれば，$a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを証明なしに用いてよい．

(1) a_3, b_1, b_2 を求めよ．

(2) $b_{n+1} = c_n b_n$ を満たす c_n について，c_n を n の式で表せ．

(3) 数列 b_n の一般項を求めよ．

(4) すべての自然数 n について $a_n \leqq a_{m_0}$ が成り立つような自然数 m_0 を考える。このような m_0 と $(10!)\cdot a_{m_0}$ の値の組をすべて求めよ．

3 α は $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，$u = \sin\alpha$ とする．関数 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x+\alpha)$ とする．次の問に答えよ．ただし，必要であれば，次の三角関数の和と積の関係式を用いてよい．

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$$

$$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2\sin A \sin B$$

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ を α を含まない u の式で表せ．

(2) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ において，関数 $f(x)$ は $x = x_0$ で最小値 c をとるとする．このとき，x_0 を α の式で表し，c を α を含まない u の式で表せ．

(3) (2)の c について，曲線 $y = f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}\right)$ と3つの直線 $y = c$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた2つの部分を D_1, D_2 とする．D_1, D_2 をそれぞれ直線 $y = c$ の周りに1回転させてできる立体の体積

を V_1, V_2 とするとき，$\dfrac{V_1+V_2}{\pi u^2}$ を α を含まない u の式で表せ.

4 x 正の実数とし，n を 0 以上の整数とする．関数 $f_n(x)$ を

$$f_0(x)=x^{-\log x},\ f_n(x)=x\frac{d}{dx}f_{n-1}(x)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．次の問に答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-s^2}\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ であることを証明無しに用いてよい.

(1) m を自然数とする．実数 t の関数 $h(t)=\left(1+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{t^k}{k!}\right)e^{-t}$ に対して，$\dfrac{d}{dt}h(t)$ を計算せよ.

(2) m を自然数とする．実数 t に対して，不等式 $\dfrac{t^{2m}}{m!}<e^{t^2}$ が成り立つことを示せ.

(3) $g_n(x)=f(x)\cdot x^{\log x}$ とし，$x=e^u$ として，合成関数について，曲線 $\ell_n(u)=g_n(e^u)$ を考える．$\ell_0(u),\ \ell_1(u)$ を求めよ．また，$n\geqq 1$ のとき，$\ell_n(u)$ は u の n 次式であることを示し，$\ell_n(u)$ における u^n の項の係数を求めよ.

(4) $I_n=\displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_{\frac{1}{b}}^{b}\{f_n(x)\}^2\,x^{\log x-1}\,dx$ とする．$I_0,\ I_1$ の値を求めよ.

(5) (4) の I_n について，I_n を n の式で表せ.