数学・全国大学入試めぐり番外編

東京理科大学・理学部・数学科

2月4日実施（**4**，**5** は2月5日実施）

1　次の (1) から (3) において，$\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし，たとえば $\boxed{\text{チツ}}$ は 2 桁の数を表すものとする。分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形で表し，根号を含む解答では，根号の中に現れる自然数は最小になる形で表すこととする。なお，問題文中に $\boxed{\text{ア}}$ などが 2 度以上現れる場合，2 度目以降は，$\boxed{\text{ア}}$ のように網掛けで表記する。（40 点）

(1) 次の定積分を求めよ。

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,dx = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

(2) 座標平面上において，双曲線 $C : x^2 - y^2 = 1$ と直線 $\ell : y = 2x + k$ を考える。ただし， k は実数とする。

（a）$x < 0$ において，C と ℓ が交点をもつための k の条件は $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \leqq k$ である。また，$x < 0$ おいて，C と ℓ が接するときの接点の座標 $(x,\, y)$ は

$$\left(-\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}},\ -\frac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}\right)$$

である。

（b）$x < 0$ と $\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} < k$ を同時に満たすときにおいて，C と ℓ の 2 つの交点の中点を P とする。$\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} < k$ の範囲で k を動かすとき，点 P の軌跡は $y = \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}x$ の $x < -\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ の部分である。

（c）$x < 0$ において，C と ℓ が 2 つの交点 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$ をもつとする。線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ の長さを k の式で表すと

$$\mathrm{Q_1Q_2} = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}\,k^2 - \boxed{\text{チツ}}}$$

となる。また，線分 $\mathrm{Q_1Q_2}$ の長さが 2 であるとき，$k = \dfrac{\boxed{\text{テ}}\sqrt{\boxed{\text{トナ}}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となる。

(3) i を虚数単位とし，$p,\, q$ を実数とする。3 次方程式 $x^3 + px + q = 0$ の 3 つの解を $x_1,\, x_2,\, x_3$ とする。ただし 2 重解は 2 個，3 重解は 3 個の解と考える。

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

とする。

（a）$x_1 = 1 - \sqrt{2}i$ のとき，他の 2 解は $x_2 = \boxed{\text{ヌ}} + \sqrt{\boxed{\text{ネ}}}i,\ x_3 = -\boxed{\text{ノ}}$ であり，$p = -\boxed{\text{ハ}},\ q = \boxed{\text{ヒ}}$ となる。

（b）$x_1 = 11$ のとき，D を p の式で表すと

$$D = -\boxed{\text{フ}}\,p^3 - \boxed{\text{ヘホ}}\,p^2 - \boxed{\text{マミ}}\,p - \boxed{\text{ムメ}}$$

となる。また，このとき，$x^3 + px + = 0$ が重解をもつための p の値は $-\boxed{\text{モ}}$ と $-\dfrac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}$ である。

（c）$x_1 = 1,\, -3 \leqq p \leqq 3$ とする。D の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ヨラ}}}{\boxed{\text{リ}}}$ であり，そのときの p の値は $-\dfrac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}}$ である。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 nを自然数とし，自然数 1, 2, 3, ……, $2n$ から異なる n 個を選んで適当な順序に並べたものを

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n$$

とする。選ばれなかった n 個を適当な順序に並べたものを

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \cdots\cdots,\ b_n$$

とする。以下の問いに答えよ。ただし，以下の (1), (2), (3) では，a_i および b_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ のあらゆる取り方を考える。（30 点）

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2$ の最大値を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ の最大値を n の式で表せ。

(3) すべての a_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ が奇数という条件のもとで，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ の最小値を n の式で表せ。また，最小値を与える a_i, b_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対し，

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i(2n-1-b_i)}$$

を n の式で表せ。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答えだけでなく，答を導く過程も記入せよ。

3 表と裏に数が書かれた同じ大きさの 15 枚のコインが袋に入っている。コインの表に書かれた数を a，裏に書かれた数を b とするとき，各コインの $(a,\ b)$ は以下である。

$$(-1,\ -1),\ (-1,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ 3),\ (0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2)$$
$$(0,\ 3),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 3)$$

袋から n 枚のコインを同時に取り出し投げる。出た面に書かれた n 個の数の和を s とおくとき，以下の問いに答えよ。（30 点）

(1) $n=2$ のとき，$s=6$ となる確率を求めよ。

(2) $n=2$ のとき，$s=0$ となる確率を求めよ。

(3) $n=3$ のとき，$s=-1$ となる確率を求めよ。

(4) $n=3$ のとき，$s=3$ となる確率を求めよ。

問題**4**の解答は解答用紙に記入せよ。答えだけでなく，答を導く過程も記入せよ。

4 座標平面内の点で x 座標，y 座標がすべて整数である点を格子点とよぶ。自然数 n に対して，以下の条件

$$0 < x \leqq \frac{n}{2},\quad 0 < y \leqq \frac{n}{2},\quad \frac{n}{2} \leqq x + y < \boldsymbol{n}$$

をすべてみたす格子点 $(x,\ y)$ の個数を A_n とする。このとき，次の問いに答えよ。（50 点）

(1) A_5, A_6, A_7 を求めよ。ただし答えのみでよい。

(2) 自然数 n に対して A_{2n+1} を求めよ。また 2 以上の自然数 n に対して A_{2n} を求めよ。

(3) 自然数 m に対して $\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{A_{2n+1}}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \sum_{n=2}^{m} \frac{1}{A_{2n}}$ を求めよ。

(5) $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{n=m}^{2m} \log \frac{A_{4m+1}}{A_{2n+1}}$ を求めよ。ただし対数は自然対数を表す。

問題 **5** の解答は解答用紙に記入せよ。答えだけでなく，答を導く過程も記入せよ。

5 a を正の実数とする。このとき x の関数 $f(x)=ax^2$ を考える。座標平面において，曲線 $y=f(x)$ 上

の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における法線を ℓ とする。このとき，次の問いに答えよ。 （50 点）

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) $t > 0$ のとき，直線 ℓ と曲線 $y = f(x)$ の 2 つの共有点のうち，点 P と異なる共有点を Q とする。点 Q の x 座標を q とおく。点 P が $t > 0$ の範囲で動くとき，q が最大となるときの点 Q の y 座標を求めよ。また q の最大値を与える t の値を求めよ。

(3) k を実数とし，直線 $y = k$ と ℓ の交点を R とおく。また点 R の x 座標を r とする。点 P が $t \geqq 0$ の範囲で動くときの r の最小値を k と a を用いて表せ。

(4) 不等式 $\dfrac{2}{a} \geqq y \geqq f(x)$ の表す領域を D とする。点 P が $t \geqq 0$ の範囲で動くとき，領域 D のなかで直線 ℓ が通る部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(5) a が変数 u の関数 $a = ue^{-3u}$ $(u > 0)$ であるとき，(4) で求めた面積 $S(s)$ が最小となる u と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。ただし e は自然対数の底とする。