一個人の感想程度の解答です。計算ミス，タイプミス，ケアレスミスがたくさんあると思いますので参考程度に利用してください。それにしても，劣悪なセットですね。本文中の ✎注 は私の感想です。お気になさらずに次にお進みください。

2024 年度 共通テスト数学１・数学 A の解答例

数学 I・数学 A

第 1 問

[1] 不等式

$$n<2\sqrt{13}<n+1 \cdots\cdots ①$$

を満たす整数 n を求めよう。

$$2\sqrt{13}=\sqrt{2^2\cdot 13}=\sqrt{52}$$

$$49<52<64 \text{ すなわち } 7^2<52<8^2$$

よって　$7<\sqrt{52}=2\sqrt{13}<8$

したがって　$n=\mathbf{7} \cdots\cdots \boxed{\text{ア}}$

✎**注**　$9<13<16$ から $3<\sqrt{13}<4$

よって　$6<2\sqrt{13}<8$

とするのは失敗です。

実数 a, b を

$$a=2\sqrt{13}-7 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$b=\frac{1}{a} \qquad \cdots\cdots ③$$

で定める。

[a は $2\sqrt{13}$ の小数部分です。b はその逆数。]

このとき

$$b=\frac{1}{a}=\frac{1}{2\sqrt{13}-7}=\frac{2\sqrt{13}+7}{(2\sqrt{13}-7)(2\sqrt{13}+7)}$$

$$=\frac{2\sqrt{13}+7}{(2\sqrt{13})^2-7^2}=\frac{2\sqrt{13}+7}{52-49}$$

$$=\frac{\mathbf{7}+2\sqrt{13}}{\mathbf{3}} \cdots\cdots \frac{\boxed{\text{イ}}+2\sqrt{13}}{\boxed{\text{ウ}}} \cdots\cdots ④$$

である。また

$$a^2-9b^2=(a+3b)(a-3b)$$

$$=\left(2\sqrt{13}-7+3\cdot\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\right)$$

$$\times\left(2\sqrt{13}-7-3\cdot\frac{7+2\sqrt{13}}{3}\right)$$

$$=(2\sqrt{13}-7+7+2\sqrt{13})$$

$$\times(2\sqrt{13}-7-7-2\sqrt{13})$$

$$=4\sqrt{13}\times(-14)=\mathbf{-56}\sqrt{13} \cdots\cdots \boxed{\text{エオカ}}$$

① の各辺を 2 で割ると

$$\frac{7}{2}<\sqrt{13}<\frac{7+1}{2} \cdots\cdots ⑤$$

① と ④ から

$$\frac{m}{3}<b<\frac{m+1}{3}$$

各辺に 3 をかけると

$$m<3b<m+1$$

$$m<3\cdot\frac{7+2\sqrt{13}}{3}<m+1$$

$$m<7+2\sqrt{13}<m+1$$

ここで　$7<2\sqrt{13}<8$

各辺に 7 を足すと

$$7+7<7+2\sqrt{13}<7+8$$

$$14<7+2\sqrt{13}<15$$

よって　$m=\mathbf{14} \cdots\cdots \boxed{\text{キク}}$

③ から

$$\frac{3}{14+1}<a<\frac{3}{14}$$

$$\frac{3}{15}<a<\frac{3}{14} \cdots\cdots ⑥$$

$$\frac{1}{5}<2\sqrt{13}-7<\frac{3}{14}$$

各辺に 7 を足すと

$$\frac{1}{5}+7<2\sqrt{13}<\frac{3}{14}+7$$

$$\frac{36}{5}<2\sqrt{13}<\frac{101}{14}$$

各辺を 2 で割って

$$\frac{18}{5}<\sqrt{13}<\frac{101}{28}$$

$$\frac{18}{5}=3.6, \quad \frac{101}{28}=3.607$$

よって

$$3.6<\sqrt{13}<3.607$$

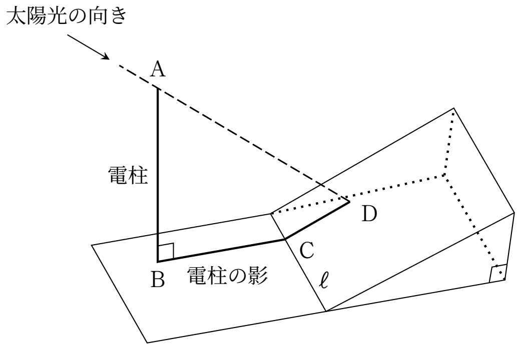
したがって，$\sqrt{13}$ の小数第 1 位の数字は **6**，小数第 2 位の数字は **0** である。

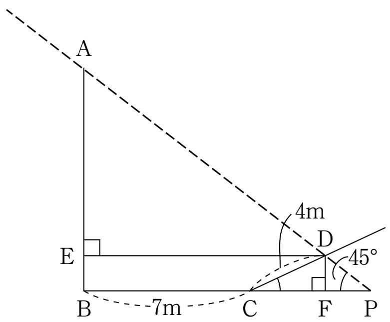
よって　$\boxed{\text{コ}}$ ……**6**　　$\boxed{\text{サ}}$ ……**0**

最後のほうの $\sqrt{13}$ の問題は，上のような不等式をいじらなくても，直接計算する方法がある。ちょっと見栄えが悪いが次のように計算すると，小数第 1 位は 6，小数第 2 位は 0 とほぼ瞬時にわかる。この計算にかかる時間は約 1 分程度である。（この計算は数研出版の教科書なら巻末の付録に掲載されている。）

		3. 6 0
3		$\sqrt{13}$
3		9
66		4 00
6		3 96
720		4 00

[2]





（✎注 角度や長さは適当です。）

条件より　$\tan\angle DCP = \dfrac{7}{100} = 0.07$

三角比表から，$\tan 4° = 0.0699$, $\tan 5° = 0.875$

よって　　$4° < \angle DCP < 4° + 1°$

したがって　　$n = \mathbf{4}$ …… $\boxed{\text{シ}}$

以下，$\angle DCP = 4°$ とする。

上の図で，D から CP に垂線 EF を下ろすと，

$BE = DF = CD \sin\angle DCP = \mathbf{4 \times \sin\angle DCP}$ m

したがって　　$\boxed{\text{ス}}$ … **4**，　$\boxed{\text{セ}}$ … **⓪**

また，

$DE = BF = BC + CF = 7 + CD\cos DCP$

$= (\mathbf{7 + 4 \times \cos\angle DCP})$ m

したがって　　$\boxed{\text{ソ}}$ … **7**，　$\boxed{\text{タ}}$ … **4**，　$\boxed{\text{チ}}$ … **②**

$AB = AE + BE = DE + BE$

$= (4 \times \sin\angle DCP) + (7 \times +4 \times \cos\angle DCP)$

$= 4 \times (\sin 4° + \cos 4°) + 7$

三角比表より　$\sin 4° = 0.0698$, $\cos 4° = 0.9976$

よって，

$AB = 4 \times (0.0698 + 0.9976) + 7$

$= 4 \times 1.0674 + 7 = 4.2696 + 7$

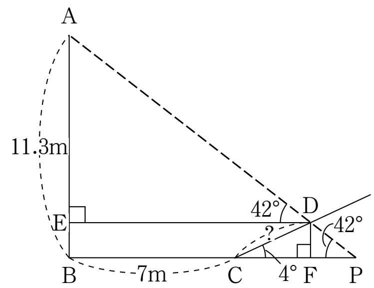
$= 11.2696 \fallingdotseq \mathbf{11.3}$m

したがって　　$\boxed{\text{ツ}}$ … **③**

✎**注**　見かけはちょっとごついけど，何のことはない，ただの計算問題でした。

別の日，$\angle APB = 42°$ であったとする。

各点の位置関係は同一なので，左列の図を角度を書き換えて利用する。



前問と同様に考えて

$AB = AE + BE$

$= ED\tan 42° + CD\sin\angle DCP$

$= (7 + CD\cos\angle DCP)\cdot\tan 42° + CD\sin\angle DCP$

$= 7\tan 42° + CD\cos\angle DCP\cdot\tan 42°$

$\quad + CD\sin\angle DCP$

$= 7\tan 42° + CD(\cos\angle DCP\cdot\tan 42° + \sin\angle DCP)$

両辺を入れ替えて

$7\tan 42° + CD(\cos\angle DCP\cdot\tan 42° + \sin\angle DCP)$

$= AB$

$CD(\cos\angle DCP\cdot\tan 42° + \sin\angle DCP)$

$= AB - 7\tan 42°$

両辺を $\cos\angle DCP\cdot\tan 42° + \sin\angle DCP (> 0)$ で割って

$$CD = \frac{AB - 7\tan 42°}{\cos\angle DCP\cdot\tan 42° + \sin\angle DCP}$$

$$= \frac{AB - \mathbf{7 \times \tan 42°}}{\mathbf{\sin\angle DCP + \cos\angle DCP \times \tan 42°}}$$

$$= \frac{AB - \boxed{\text{テ}} \times \boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}} \times \boxed{\text{ト}}}$$

したがって　　$\boxed{\text{テ}}$ … **7**，　$\boxed{\text{ト}}$ … **⑤**

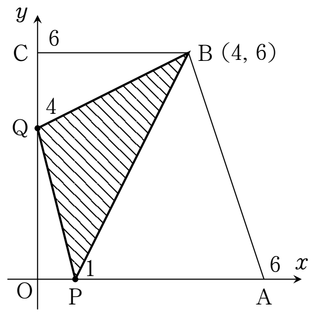
$\boxed{\text{ナ}}$ … **⓪**，　$\boxed{\text{ニ}}$ … **①**

第2問

[1]

(1)（三角形の面積の求め方は何通りもあるが，ここでは台形から周囲を引く，という方法でいこう。しかし，何と言えばいいのか，これって高校入試じゃね？）

1 秒後の P，Q の位置は図の通りである。よって



$\triangle PBQ=$ 台形 $OPBC$
$-\triangle OPQ$
$-\triangle BCQ$

ここで，

台形 $OPBC=\dfrac{1}{2}(1+4)\cdot 6=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 6=15$

$\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 4=2$，$\triangle BCQ=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4=4$

よって

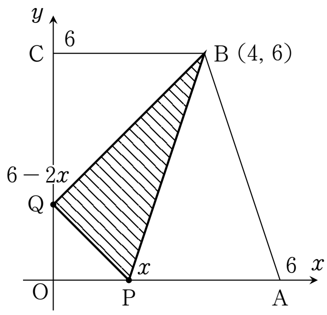
$\triangle PBQ=15-2-4=\mathbf{9}$

したがって　$\boxed{\text{ア}}$ … **9**

(2) 開始時刻から x 秒経過したときの $\triangle PBQ$ の面積を考えよう。

$0\leqq x\leqq 3$ のとき，

点 $P(x,0)$，点 $Q(0,6-2x)$ であるから



$\triangle PBQ=$ 台形 $OPBC$
$-\triangle OPQ$
$-\triangle BCQ$

ここで，

台形 $OPBC=\dfrac{1}{2}(x+4)\cdot 6=3(x+4)$

$\triangle OPQ=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot(6-2x)=x(3-x)$

$\triangle BCQ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2x=4x$

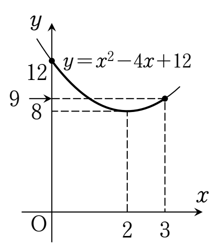
よって

$$\begin{aligned}\triangle PBQ&=3(x+4)-x(3-x)-4x\\&=x^2+(3-3-4)x+12=x^2-4x+12\\&=(x-2)^2-4+12=(x-2)^2+8\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 3$ であるから，

$\triangle PBQ$ は $x=2$ で最小値 **8**，

$x=0$ で最大値 **12** をとる。



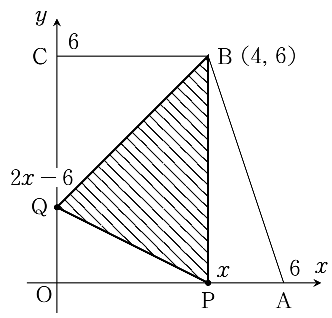
よって　$\boxed{\text{イ}}$ … **8**，　$\boxed{\text{ウ}}$ … **12**

(3) $3\leqq x\leqq 6$ のとき，

点 $P(x,0)$，点 $Q(0,2x-6)$ であるから

$\triangle PBQ=$ 台形 $OPBC-\triangle OPQ-\triangle BCQ$

ここで，



台形 $OPBC=\dfrac{1}{2}(x+4)$
$\times 6=3(x+4)$

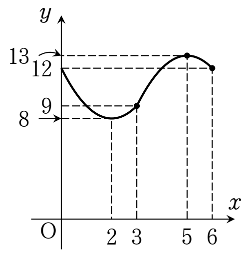
$\triangle OPQ$
$=\dfrac{1}{2}\cdot x\cdot(2x-6)$
$=x(x-3)=x^2-3x$

$\triangle BCQ$
$=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\{6-(2x-6)\}=2(6-2x+6)=24-4x$

よって

$$\begin{aligned}\triangle PBQ&=3(x+4)-(x^2-3x)-(24-4x)\\&=-x^2+(3+3+4)x+12-24\\&=-x^2+10x-12=-(x-5)^2+13\end{aligned}$$

よって，$0\leqq x\leqq 6$ のとき $\triangle PBQ$ の値は右のグラフのようになる。

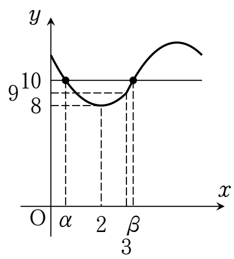


したがって，$\triangle PBQ$ は $x=2$ で最小値 **8**，$x=5$ で最大値 **13** をとる。

よって　$\boxed{\text{オ}}$ … **8**，　$\boxed{\text{カキ}}$ … **13**

(4) $\triangle PBQ=10$ となる x の値を求めよう。

$0\leqq x\leqq 3$ のとき



$$x^2-4x+12=10$$

$$\Longleftrightarrow x^2-4x+2=0$$

よって，解の公式から

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot 2}}{1}\\&=2\pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq 3$ だから　$x=2-\sqrt{2}$（$=\alpha$ とおく）

$3\leqq x\leqq 6$ のとき

$-x^2+10x-12=10\Longleftrightarrow -x^2+10x-22=0$

$\Longleftrightarrow x^2-10x+22=0$

よって，解の公式から

$$\begin{aligned}x&=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-1\cdot 22}}{1}\\&=5\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

$3\leqq x\leqq 6$ だから　$x=5-\sqrt{3}$（$=\beta$ とおく）

よって，答えは

$$\begin{aligned}\beta-\alpha&=(5-\sqrt{3})-(2-\sqrt{2})\\&=\mathbf{3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}\ \text{秒間}\end{aligned}$$

よって　$\boxed{\text{ク}}$ … **3**，　$\boxed{\text{ケ}}$ … **3**，　$\boxed{\text{コ}}$ … **2**

[2]

✎注 かなり日本語の説明が多いですが，ほとんどが問題文のパクりですので，適当に読み飛ばしてください。本番ではこんな説明は不要ですね。なお，これは第4問以降の問題でも同様です。

(1)

（ｉ）図1からAの最頻値は19人が含まれている階級「**510秒以上540秒未満**」の階級値である。

$\boxed{サ}$ … ⑧

また，図2からBの中央値[最上位または最下位から25番目と26番目のデータの平均]が含まれる階級は「**450秒以上480秒未満**」である。

$\boxed{シ}$ … ⑥

（ii）

- Bの速いほうから13番目の選手のベストタイムは，第1四分位数であるから約435秒，Aの速い方から13番目のベストタイムは，第1四分位数であるから約480秒。したがって，その差は約45秒。

  よって $\boxed{ス}$ … ④

- Aの四分位範囲は $530-480=50$ から約50秒，Bの四分位範囲は $485-435=50$ より約50秒。したがって，差の絶対値は $50-50=0$。

  よって $\boxed{セ}$ … ⓪

（iii）式と表1より，Bの1位の選手のベストタイムに対する z の値を求めよう。

$$293=454+z\times 45$$
$$454+z\times 45=293$$
$$z\times 45=293-454$$
$$z\times 45=-158$$
$$z=-158\div 45=\mathbf{-3.51}$$

よって $\boxed{ソ}$ … **3**，　$\boxed{タチ}$ … **51**

同様に，Aの1位の選手のベストタイムに対する z の値を求めよう。

$$376=504+z\times 40$$
$$504+z\times 40=376$$
$$z\times 40=376-504$$
$$z\times 40=-128$$
$$z=-128\div 40=-3.2$$

ベストタイムで比較するとBの1位の選手の方が速く，zの値で比較すると絶対値が大きいBの1位の選手のほうが優れている。

よって $\boxed{ツ}$ … ①

✎注 ベストタイムは小さいほど優秀で，z の値は絶対値が大きいほど優秀です。

(2) 散布図ですが，左や下に行けば行くほど優秀ということです。

(a) について。マラソンのベストタイムの速いほうから3番目までの選手の10000 mのベストタイムは，左の散布図の左下の3つの ○ のデータを読めばよい。3つの ○ はすべて1670秒未満である。よって (a) は**正しい**。

(b) について。2つの相関図から読み取れる相関関係は，左が弱く，右が強い。したがって，(b) は**誤り**。

よって $\boxed{テ}$ … ①

第3問

(1)

（ｉ）すべての場合の数は $2\times 2=4$ で，これらは同様に確からしい。2回の試行でA，Bがそろっている場合の数は，「1回目A，2回目B」または「1回目B，2回目A」の2通り。よって，答えは

$$\frac{2}{4}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\cdots\cdots\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

（ii）3回の試行でA，Bがそろっている確率を求める。すべての場合の数は $2\times 2\times 2=2^3$

3回の試行でのうち $\boxed{A}$ を1回，$\boxed{B}$ を2回取り出す取り出し方は次の通りで，全部で3通りある。

1回目	2回目	3回目
A	B	B
B	A	B
B	B	A

また，$\boxed{A}$ を2回，$\boxed{B}$ を1回取り出す取り出し方は上と同様，全部で3通りある。
したがって，3回の試行でA，Bがそろっている取り出し方は $3+3=\mathbf{6}$ 通りあることがわかる。3回の試行でA，Bがそろっている確率は $\frac{6}{2^3}$ である。

よって $\boxed{ウ}$ …… **6**

（iii）4回の試行でA，Bがそろっている取り出し方を考えよう。余事象は「A，Bがそろっていない」すなわち「Aばかり取り出すか，またはBばかり取り出す」である。余事象の場合の数は，2通り。
また，すべての場合の数は 2^4 通りであるから，4回の試行でA，Bがそろっている取り出し方は

$$2^4-2=16-2=\mathbf{14}\text{ 通り}$$

ある。

よって $\boxed{エオ}$ …… **14**

よって4回の試行でA，Bがそろっている確率は

$$\frac{14}{16}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}\ \cdots\cdots\ \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$$

(2)

（ｉ）3 回目の試行で始めて A，B，C がそろう取り出し方は，A，B，C 3 文字の順列の個数に等しいから，

$$3!=\mathbf{6}\text{ 通り}\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{ク}}$$

である。

よって，3 回目の試行で始めて A，B，C がそろう確率は

$$\frac{6}{3^3}$$

である。

（ii）4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率を求める。

4 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方は，(1) の（ii）を振り返ることにより，3×6 通りあることがわかる。

すべての場合の数は 3^4 だから，求める確率は

$$\frac{3\times6}{3^4}=\frac{3\times2\times3}{3\times3\times3\times3}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}\ \cdots\cdots\ \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$$

（iii）5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出し方を考える。5 回目に初めて C を取り出す場合を考える。4 回目までは少なくとも 1 回は A，B を取り出すから，取り出し方は $2^4-2=14$ 通り。5 回目に初めて A，B を取り出す場合も同様だから，5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう取り出す取り出し方は $14\times3=\mathbf{42}$ 通り。

よって　$\boxed{\text{サシ}}$ …… **42**

したがって，5 回目の試行で初めて A，B，C がそろう確率は $\frac{42}{3^5}$ である。

(3) 花子さんの考えにしたがって，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう確率を求めよう。

- 6 回の試行のうち 3 回の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方が 6 通りであることに注意すると，「6 回の試行のうち 3 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方を考える。4 回目，5 回目は A，B，C のどれでもよいので 3^2 通り，6 回目は $\boxed{\text{D}}$ を取り出すので 1 通り。したがって，この場合の取り出し方は
$$6\times3^2\times1=6\times9=\mathbf{54}\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{スセ}}$$
通り。

- 6 回の試行のうち 4 回の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方が $3\times\boxed{\text{ウ}}=3\times6=18$ 通りであることに注意すると，「6 回の試行のうち 4 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方を考える。5 回目は A，B，C のどれでもよいので 3 通り，6 回目は $\boxed{\text{D}}$ を取り出すので 1 通り。したがって，この場合の取り出し方は
$$18\times3\times1=\mathbf{54}\ \cdots\cdots\ \boxed{\text{ソタ}}$$
通り。

- 6 回の試行のうち 5 回の試行で初めて A，B，C だけがそろう取り出し方が $\boxed{\text{サシ}}=42$ 通りであることに注意すると，「6 回の試行のうち 5 回目の試行で初めて A，B，C だけがそろい，かつ 6 回目の試行で初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される」取り出し方を考える。6 回目は $\boxed{\text{D}}$ を取り出すので 1 通り。したがって，この場合の取り出し方は $42\times1=42$ 通り。

以上から，5 回目までに $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ のそれぞれが少なくとも 1 回は取り出され，かつ 6 回目に初めて $\boxed{\text{D}}$ が取り出される場合は全部で $54+54+42=150$ 通りある。

6 回目に初めて $\boxed{\text{A}}$，$\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$ が取り出される場合も同様だから，6 回目の試行で初めて A，B，C，D がそろう場合の数は 150×4 通り。

したがって，求める確率は

$$\frac{150\times4}{4^6}=\frac{75\times2^3}{2^{12}}=\frac{75}{2^9}=\frac{\mathbf{75}}{\mathbf{512}}\ \cdots\ \frac{\boxed{\text{チツ}}}{\boxed{\text{テトナ}}}$$

第 4 問

以下，数は原則として 10 進数で表す。3 進数などの数は数の右下に 3 などの数字を添える。

(1) 10 進数の 40 を 6 進数に直すと

$$40=1\cdot6^2+0\cdot6^1+4$$

より，$\mathbf{104}_{(6)}$

よって　$\boxed{\text{アイウ}}$ …… **104**

2 進数の 10011 を 10 進数，4 進数の順に直すと

$$\begin{aligned}&1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot1\\&=1\cdot(2^2)^2+2+1\\&=1\cdot4^2+0\cdot4^1+3\end{aligned}$$

より，$\mathbf{103}_{(4)}$

よって　$\boxed{\text{エオカ}}$ …… **103**

(2) T4 の表示が 000 に戻る 1 秒前の表示は 333 であり，

$$\begin{aligned}333_{(4)}&=3\cdot4^2+3\cdot4^1+3\\&=3\cdot16+3\cdot4+3=48+12+3=63\end{aligned}$$

であることから，初めて表示が 000 に戻るのは，

$$63+1=\mathbf{64}\text{ 秒後}$$

である。

よって　$\boxed{\text{キク}}$ …… **64**

T6 が初めて 000 に戻る 1 秒前の表示は 555 であり，

$555_{(6)} = 5 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^1 + 5$

$= 5 \cdot 36 + 5 \cdot 6 + 5 = 180 + 30 + 5 = 215$

であることから，初めて表示が 000 に戻るのは，

$$215 + 1 = 216 \text{ 秒後}$$

である。

したがって，T4 と T6 を同時にスタートさせた後，初めて両方の表示が同時に 0 に戻るのは，スタートしてから「10 進数で 64 と 216 の最小公倍数」秒後である。

$64 = 2^6$

$216 = 2^3 \cdot 3^3$

であるから，最小公倍数は $2^6 \cdot 3^3 = 64 \cdot 27 = 1728$

よって　$\boxed{\text{ケコサシ}}$ …… **1728**

(3) T4 が 012 と表示されるのは，T4 をスタートさせてから $012 = 1 \cdot 4 + 2 = 6$ 秒後である。したがって，次に 012 と表示されるのは 64 秒ごとであるから

$$\ell = 64 \cdot p + 6 \text{（}p\text{ は負でない整数）}$$

が成り立つ。

よって　$\boxed{\text{スセ}}$ …… **64**　$\boxed{\text{ソ}}$ …… **6**

T3 についても同様に考察する。

T3 が 012 と表示されるのは，T3 をスタートさせてから $012 = 1 \cdot 3 + 2 = 5$ 秒後である。したがって，次に 012 と表示されるのは $3^3 = 27$ 秒ごとであるから

$$\ell = 27 \cdot q + 5 \text{（}q\text{ は負でない整数）}$$

したがって，

$$64p + 6 = 27q + 5 \text{ …… ①}$$

を満たす負でない整数 p, q を求めよう。

① を変形して

$64p - 27q = -1$

$(27 \cdot 2 + 10)p - 27q = -1$

$27(2p - q) + 10p = -1$ …… ②

$-81 + 80 = 27 \cdot (-3) + 10 \cdot 8 = -1$ …… ③ であるから

② − ③ より

$$\begin{array}{rcccccc} & 27(2p-q) & + & 10p & = & -1 \\ -) & 27 \cdot (-3) & + & 10 \cdot 8 & = & -1 \\ \hline & 27(2p-q+3) & + & 10(p-8) & = & 0 \end{array}$$

よって

$27(2p - q + 3) = -10(p - 8)$ …… ④

27 と 10 は互いに素だから，$p - 8$ は 27 の倍数。よって，s を整数として

$$p - 8 = 27s \text{ …… ⑤}$$

よって　　$p = 27s + 8$ …… ⑥

⑤ を ④ に代入して

$$27(2p - q + 3) = -10 \cdot 27s$$

よって　　$2p - q + 3 = -10s$

これに ⑥ を代入して

$2(27s + 8) - q + 3 = -10s$

よって　　$q = (54 + 10)s + 3 = 64s + 3$ …… ⑦

したがって $\ell = 64 \cdot (27s + 8) + 6$ を最小にする整数 s は 0 で，そのとき $\ell = 64 \cdot 8 + 6 = 512 + 6 = \mathbf{518}$.

これは m に等しい。

よって　$\boxed{\text{タチツ}}$ …… **518**

T4，T6 についても上と同様に考える。スタートさせた ℓ 秒後に T4，T6 が 012 と表示されるとする。

T4 について，$\ell = 64p + 6$（p は負でない整数）

T6 について，$\ell = 216r + 8$（r は負でない整数）

よって，

$$64p + 6 = 216r + 8$$

を満たす負でない整数 p, r を求めよう。

変形して

$$64p - 216r = 2$$

両辺を 2 で割ると

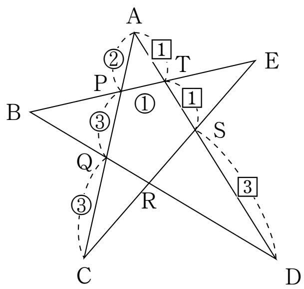
$$32p - 106r = 1 \text{ …… ⑧}$$

左辺 $2(16p - 53r)$ は偶数，右辺 1 は奇数。したがって，⑧ を満たす整数 p, r は存在しない。

よって　$\boxed{\text{テ}}$ …… **③**

第 5 問

(1) △AQD と直線 CE に着目し，メネラウスの定理を用いると



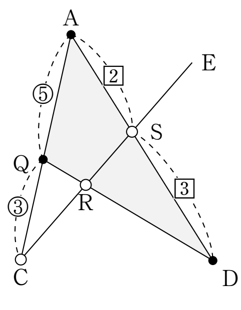
$$\frac{QR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{\mathbf{AC}}{CQ} = 1$$

よって　$\boxed{\text{ア}}$ …… **⓪**

$$\frac{QR}{RD} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 1$$

$$\frac{QR}{RD} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

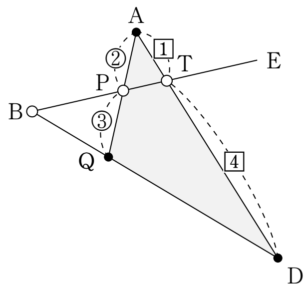
よって　QR : RD = **1 : 4**



よって　$\boxed{\text{イ}}$: $\boxed{\text{ウ}}$ = **1 : 4**

△AQD と直線 BE に着目し，メネラウスの定理を用いると

$$\frac{QB}{BD} \cdot \frac{DT}{TA} \cdot \frac{AP}{PQ} = 1$$

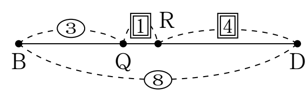


$$\frac{QB}{BD} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{QB}{BD} = 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{8}$$

よって　QB : BD = **3 : 8**

よって　$\boxed{\text{エ}}$: $\boxed{\text{オ}}$ = **3 : 8**



したがって，

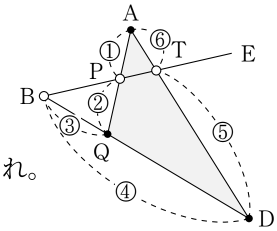
$$3+1+4=8$$

だから

$$BQ : QR : RD = 3 : 1 : 4$$

メネラウスの定理

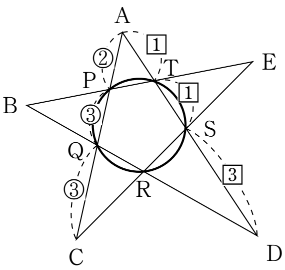
△AQD の頂点 • から出発し，同一辺上を • → ◦ の順に一周する。たとえば，① → ② → ③ → ④ → ⑤ → ⑥ の順に回れ。



$$\frac{AP}{PQ}\cdot\frac{QB}{BD}\cdot\frac{DT}{TA}=1$$

数字は比ではなく回る順番

(2) 5 点 P，Q，R，S，T が同一円周上にあるとし，AC = 8 であるとしよう。



(i) 5 点 A，P，Q，S，T に着目すると，方べきの定理により

$AP\cdot PQ = PT\cdot TS$ …… ①

ここで，AC = 8 であることから

$$AP=\frac{2}{8}\cdot AC=\frac{1}{4}\cdot 8=2$$

同様に　$AQ=\frac{5}{8}\cdot 8=5$

AT = x とおくと AS = $2x$ であるから，① に代入して

$$2\cdot 5 = x\cdot 2x \Longleftrightarrow 2x^2=10 \Longleftrightarrow x^2=5$$

$x>0$ より　$x = AT = \sqrt{\mathbf{5}}$ …… $\boxed{\text{ウ}}$

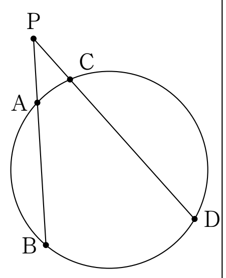
さらに，5 点 D，Q，R，S，T に着目すると DR = $4\sqrt{3}$ となることがわかる。（これはそのまま信じよう！ ）

方べきの定理

円外の 1 点 P から円に交わる 2 本の直線を引き，それぞれと円の交点を A，B，また，C，D とする。このとき

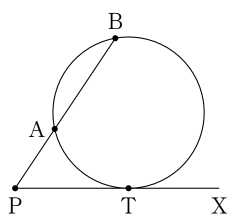
$$\mathbf{PA\cdot PB = PC\cdot PD}$$

が成り立つ。



また，これは，点 P が円内にあっても成り立つ。

さらに，直線 PX が円に点 T で接し，点 P を通る直線が点 T 以外の 2 点 A，B で交わるとき



$$\mathbf{PT^2 = PA\cdot PB}$$

が成り立つ。

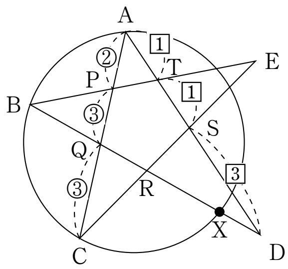
✎**注**　どちらの場合も，必ず P から始まる線分の積にで計算すること。間違っても AP・BP とかやると墓穴を掘るぞ。

(ii) 3 点 A，B，C を通る円と点 D との位置関係を，次の構想に基づいて調べよう。

構想

線分 AC と BD の交点 Q に着目し，AQ・CQ と BQ・DQ の大小を比べる。

まず，$AQ\cdot CQ = 5\cdot 3 = 15$



また，

$DR = 4\sqrt{3}$

$BQ : QR = 3 : 1$

であるから

$BQ = 3\sqrt{3},\ DQ = 5\sqrt{3}$

よって

$BQ\cdot DQ = 3\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = \mathbf{45}$ …… $\boxed{\text{キク}}$

したがって

$$AQ\cdot CQ < BQ\cdot DQ \text{ …… ①}$$

よって　$\boxed{\text{ケ}}$ …… **⓪**

また，3 点 A，B，C を通る円と直線 BD の交点のうち，B と異なる点を X とすると，方べきの定理より

$$AQ\cdot CQ = BQ\cdot XQ \text{ …… ②}$$

よって　$\boxed{\text{コ}}$ …… **①**

① と ② の左辺は同じなので，① と ② の右辺を比べることにより，

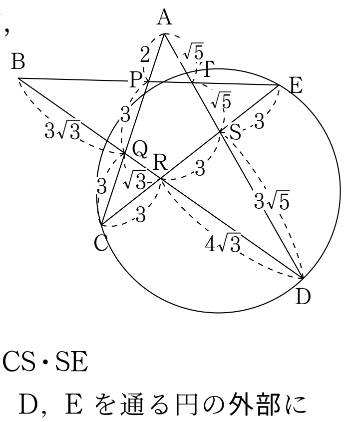
$$XQ < DQ$$

よって　$\boxed{\text{サ}}$ …… **⓪**

したがって，点 D は 3 点 A，B，C を通る円の**外部**にある。

よって　$\boxed{\text{シ}}$ …… **②**

(iii) この星形の図形において，さらに CR = RS = SE = 3 となることがわかる。したがって (ii) と同様に考える。



$AS\cdot SD = 2\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5} = 30$

一方，

$CS\cdot SE = 6\cdot 3 = 18$

よって

$$AS\cdot SD > CS\cdot SE$$

したがって，点 A は 3 点 C，D，E を通る円の**外部**にある。

また，

$$\mathrm{BR}\cdot\mathrm{RD}=2\sqrt{5}\cdot3\sqrt{5}=30$$

一方，

$$\mathrm{CR}\cdot\mathrm{RE}=6\cdot3=18$$

よって

$$\mathrm{BR}\cdot\mathrm{RE}>\mathrm{CR}\cdot\mathrm{RE}$$

したがって，点 B は 3 点 C，D，E を通る円の**外部**にある。

以上から　$\boxed{ス}$ …… ②　　$\boxed{セ}$ …… ②

注 ソフトでは正確な図が描けるが，手書きでは無理だろう。上のように計算するしかないでしょう。

（数学 I A は以上です）

ちょっとあとがき。

この解答は例の TEX という無料ソフトを使って作成した。このソフトについてはいろいろ問題があって，先人，たとえば，あの大学受験界の神様，安田亨氏が塾の講師はこんな面倒なソフトは使うべきでないと断言されている。

なるほど，安田亨氏がおっしゃっていた通り，TEX などに手をつけず，word や mathtype などで処理するか，数研出版の studyaid を使っていたほうが簡単で時短になっていただろう。数学 1A と数学 2B の解答を作るのに計 20 時間はかかっているだろう。解くのは 1 時間ずつくらいだから，いかに重労働でコスパが悪いか，容易に想像できる。

しかし，TEX にはそれなりのいいところがある。まず，慣れれば，ほとんどの数学的表記が可能であり，また，図表なども TEX に含まれている TikZ というソフトを使えば，ほぼ完璧に処理することができる。（解答中の図・表はすべて TikZ で描いている。）さらに，何と言っても美しい。

それに無料とういのも魅力的だ。インストールに 2 時間ほどかかるのは目をつぶるとして，インストールした後はほとんどエラーもでない。アップデートもそれほど必要ではない。ほんとにこの塾のような貧乏塾のためのソフトだろう。

とは言うものの，思い通りに操るのに 2 年近い歳月を要した。数式作成のフォームがあるのだが，思わぬところに余白が生まれたり，とんでもないところに図が飛んでいくことが，何度もあった。が，Web の先達のおかげで何とか乗り越えることができた。感謝の気持ちでいっぱいである。

感謝といえば，忘れてならないのは安田亨氏である。彼は，高校数学・受験数学に特化した記号などを作成し無償で私のような貧乏塾に提供していただいている。解答の中の，長丸記号とか，丸数字，さらには種々括弧類，増減表，など，他では手に入らない記号類はすべて安田氏の提供のもので，とても貴重である。安田氏には，いくら感謝しても十分とはいえない。

使い始めたときは，Tikz という内蔵ソフトで図が描けるとは思いもよらず，最初の 1 ヶ月くらいで無理だと思ってあきらめた。しかし，アマゾンで「美図数式」という書物を見つけてポチったところ，なんと，他に高価なソフトを買わなくても図が描けることが判明。この本は，内容については評価が割れるところだが，私にとっては作図のヒントを与えてくれたという点で神のような書物である。この本に出会っていなかったら，今頃も手書きで解答を作っていたただろう。ま，それはそれで意味があるが，やはり，読みやすい，見やすい，というのはプライオリティが高いはずだ。

安田亨氏，「美図数式」の著者，Web の先人たちへの感謝の気持ちを忘れず，さらに有能な TEX 使いになることをここに誓います。

令和 6 年 2 月 5 日（月）

外賀塾（げかじゅく）