2019センター試験 数学II・B

第1問

[1] $f(\theta)=3\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta$

(1) $f(0)=3\sin^2 0+4\sin 0\cdot\cos 0-\cos^2 0$

$=3\cdot 0^2+4\cdot 0\cdot 1-1^2$

$=\underline{-1}$ $\boxed{アイ}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sin^2\frac{\pi}{3}+4\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{3}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

$=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=3\cdot\frac{3}{4}+\sqrt{3}-\frac{1}{4}$

$=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}+\sqrt{3}=\frac{8}{4}+\sqrt{3}$

$=\underline{2+\sqrt{3}}$ $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$

(2) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ (公式) より

両辺を入れかえて

$2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$

$2\cos^2\theta=\cos 2\theta+1$

$\cos^2\theta=\frac{\cos 2\theta+1}{\underline{2}}$ $\boxed{オ}$

$\boxed{カ}$

同様にして,

$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$,

$\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

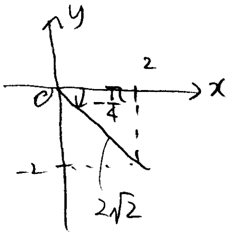
であるから

$f(\theta)=3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}+4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\cos 2\theta+1}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cos 2\theta+2\sin 2\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta-\frac{1}{2}$

$=\underline{2}\sin 2\theta-\underline{2}\cos 2\theta+\underline{1}$ $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$, $\boxed{ケ}$

(3) 右図より

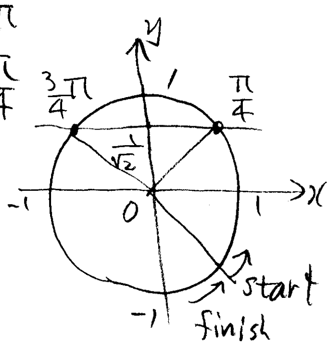


$f(\theta)=\underline{2\sqrt{2}}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\underline{1}$

$\boxed{コサ}$ $\boxed{シ}$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より $0\leqq 2\theta\leqq 2\pi$

よって, $-\frac{\pi}{4}\leqq 2\theta-\frac{\pi}{4}\leqq 2\pi-\frac{\pi}{4}$



従って,

$-1\leqq\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 1$

よって,

$-2\sqrt{2}\leqq 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\leqq 2\sqrt{2}$

$-2\sqrt{2}+1\leqq 2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1\leqq 2\sqrt{2}+1$

$1-2\sqrt{2}\leqq f(\theta)\leqq 1+2\sqrt{2}$

$4<8<9$ より $2<2\sqrt{2}<3$

よって, $3<1+2\sqrt{2}<4$

したがって, $m=\underline{3}$ $\boxed{ス}$

$f(\theta)=2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+1=3$ のとき

$2\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2$

$\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

上の図から

$2\theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi$

$2\theta=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{4}$

$2\theta=\frac{\pi}{2},\ \pi$

$\theta=\underline{\frac{\pi}{4}},\ \underline{\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$

[2]

$$\begin{cases} \log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 \cdots\cdots ② \\ \left(\frac{1}{3}\right)^y-11\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

②で，真数は正だから

$x+2>0$ かつ $y+3>0$

よって，$\underline{x>-2,\ y>-3}$ ② $\boxed{タ}$

底の変換公式より

$$\log_4(y+3)=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 4}=\frac{\log_2(y+3)}{\log_2 2^2}$$

$$=\frac{\log_2(y+3)}{2\log_2 2}=\underline{\frac{\log_2(y+3)}{2}}\ \boxed{チ}$$

よって，②から

$$\log_2(x+2)-2\cdot\frac{\log_2(y+3)}{2}=-1$$

$$\log_2(x+2)-\log_2(y+3)=-1$$

$$\log_2\frac{x+2}{y+3}=-1$$

$$\frac{x+2}{y+3}=2^{-1}$$

$$x+2=\frac{1}{2}(y+3)$$

(×2)

$$2(x+2)=y+3$$

両辺を入れかえて

$$y+3=2x+4$$

$$y=\underline{2}x+\underline{1}\ \boxed{ツ},\boxed{テ} \cdots\cdots ④$$

$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ とおくと

$$\left(\frac{1}{3}\right)^y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1$$

$$=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}t^2$$

よって，③は

$$\frac{1}{3}t^2-11\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1+6=0$$

$$\frac{1}{3}t^2-\frac{11}{3}t+6=0$$

(×3)

$$t^2-\underline{11}t+\underline{18}=0 \cdots\cdots ⑤$$

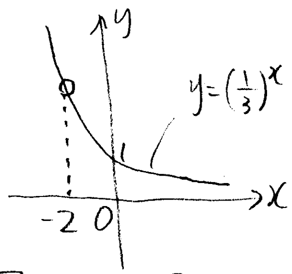
$\boxed{トナ}$ $\boxed{ニヌ}$

$\boxed{タ}$のとき $x>-2,\ 2x+1>-3$

どちらも $x>-2$

よって，

$$0<\left(\frac{1}{3}\right)^x<\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$



従って

$$\underline{0}<t<\underline{9}\ \boxed{ネ},\boxed{ノ} \cdots\cdots ⑥$$

⑥の範囲で方程式⑤を解くと

$$(t-2)(t-9)=0$$

$$t=2,9$$

⑥より $t=\underline{2}$ $\boxed{ハ}$

従って，$t=\left(\frac{1}{3}\right)^x=2$ より $x=\log_{\frac{1}{3}}2$

底変換の公式より

$$x=\frac{\log_3 2}{\log_3\frac{1}{3}}=\frac{\log_3 2}{\log_3 3^{-1}}=\frac{\log_3 2}{-\log_3 3}=-\log_3 2$$

$$=\log_3 2^{-1}=\log_3\underline{\frac{1}{2}}\ \begin{matrix}\boxed{ヒ}\\\boxed{フ}\end{matrix}$$

$$y=2x+1=2\log_3\frac{1}{2}+1$$

$$=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\log_3 3$$

$$=\log_3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3$$

$$=\log_3\underline{\frac{3}{4}}\ \begin{matrix}\boxed{ヘ}\\\boxed{ホ}\end{matrix}$$

第2問

$f(x)=x^3+px^2+qx$

$f'(x)=3x^2+2px+q$

(1) 関数$f(x)$が$x=-1$で極値をとるので

$f'(-1)=0$ $\boxed{ア}$ である.

よって, $f'(-1)=3(-1)^2+2p(-1)+q=0$

$3-2p+q=0$ ……㋐

また, $f(-1)=2$より

$(-1)^3+p\cdot(-1)^2+q\cdot(-1)=2$

$-1+p-q=2$ ……①

㋐+①より

$2-p=2$

$-p=0$

$p=0$ $\boxed{イ}$

$p=0$を㋐に代入して

$3-2\cdot0+q=0$

$q=-3$ $\boxed{ウエ}$

よって,

$f(x)=x^3-3x=x(x^2-3)$

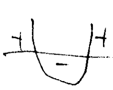
$f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$

$=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$のとき $x=-1, 1$

よって, $f(x)$の増減表は次の通り.

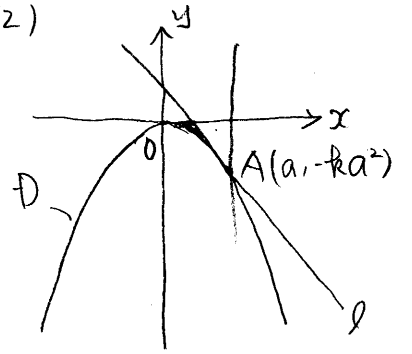
x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗



よって, $f(x)$は$x=1$ $\boxed{オ}$ で極小値

$f(1)=1^3-3\cdot1=1-3=-2$ $\boxed{カキ}$ をとる.

(2)



$y=-kx^2=h(x)$ とおく.

$y'=h'(x)=-2kx$

よって, lの方程式は

$y-h(a)=h'(a)(x-a)$

$y=-2ka(x-a)+(-ka^2)$

$y=-2kax+2ka^2-ka^2$

$y=-2kax+ka^2$ ……① $\boxed{クケ}$ $\boxed{コ}$

lとx軸との交点のx座標は, ①で$y=0$とすると,

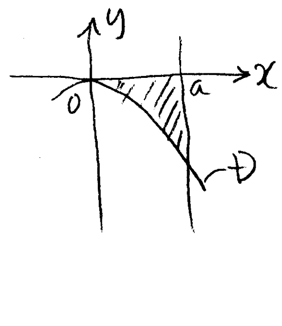
$0=-2kax+ka^2$

$2kax=ka^2$

$x=\dfrac{ka^2}{2ka}=\dfrac{a}{2}$ $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$

Dとx軸および直線$x=a$で囲まれた図形の面積は

$-\int_0^a(-kx^2)dx=\int_0^a kx^2dx$

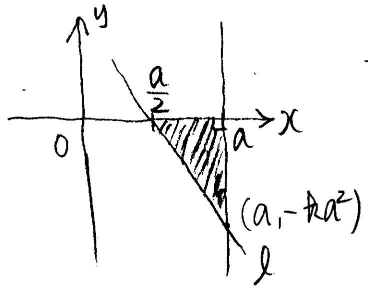


$=\left[\dfrac{k}{3}x^3\right]_0^a$

$=\dfrac{k}{3}a^3$ $\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$

……あ

また，lとx軸および直線$x=a$で囲まれた図形の面積は



$$\frac{1}{2}\cdot\left(a-\frac{a}{2}\right)\cdot ka^2$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot ka^2$$
$$=\frac{k}{4}a^3 \cdots ⓘ$$

よって，

$$S=ⓐ-ⓘ=\frac{k}{3}a^3-\frac{k}{4}a^3$$
$$=\left(\frac{4k}{12}-\frac{3k}{12}\right)a^3=\frac{k}{12}a^3 \quad \boxed{ス}\boxed{タ}, \boxed{セ}$$

(2) Aが$C: y=f(x)=x^3-3x$上にあるので，

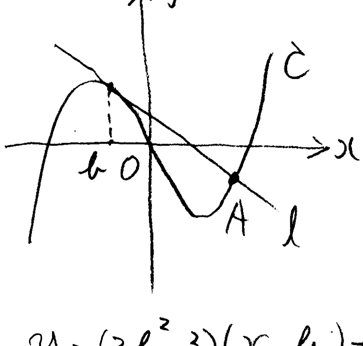
$$-ka^2=a^3-3a$$

両辺を$-a^2$で割って

$$k=-a+\frac{3}{a}=\frac{3}{a}-a \quad \boxed{チ}/\boxed{ツ}, \boxed{テ}$$

lとCの接点のx座標をtとすると，

$f'(x)=3x^2-3$より，lの方程式は



$$y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$$
$$=(3t^2-3)x-(3t^2-3)t+t^3-3t$$
$$=3(t^2-1)x-3t^3+3t+t^3-3t$$
$$=3(t^2-1)x-2t^3 \quad \boxed{ト}, \boxed{ナ}, \boxed{ニ} \cdots ②$$

$g(x)=3(t^2-1)x-2t^3$とおくと，Cとlは$x=t$なる点で接するから，$f(x)-g(x)$は$(x-t)^2$を因数にもつことに注意すると，

$$f(x)-g(x)=(x^3-3x)-\{3(t^2-1)x-2t^3\}$$
$$=(x^3-3x)-3(t^2-1)x+2t^3$$
$$=x^3+(-3-3t^2+3)x+2t^3$$
$$=x^3-3t^2x+2t^3$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
t & 1 & 0 & -3t^2 & 2t^3 \\
 & & t & t^2 & -2t^3 \\
\hline
t & 1 & t & -2t^2 & 0 \\
 & & t & 2t^2 & \\
\hline
 & 1 & 2t & 0 &
\end{array}$$

よって，

$$f(x)-g(x)=(x-t)^2(x+2t)$$
$$\boxed{ヌ} \quad \boxed{ネ}$$

と因数分解されるので，$x=-2t$が点Aのx座標である．よって

$$a=-2t \cdots\cdots ③$$

となるので，①と②の直線の傾きを比較することにより

$$-2ka=3(t^2-1)$$

$\boxed{チ}/\boxed{ツ}, \boxed{テ}$より

$$-2\left(\frac{3}{a}-a\right)a=3t^2-3$$
$$-6+2a^2=3t^2-3$$

また，③より$t=-\frac{1}{2}a$

これを代入して

$$-6+2a^2=3\cdot\left(-\frac{1}{2}a\right)^2-3$$
$$2a^2=3\cdot\frac{1}{4}a^2-3+6$$

$$2a^2=\frac{3}{4}a^2+3$$

$(\times 4)$

$$8a^2=3a^2+12$$

$$8a^2-3a^2=12$$

$$5a^2=12$$

$$a^2=\frac{12}{5} \quad \frac{\boxed{ソハ}}{\boxed{ヒ}}$$

したがって、求めるSの値は

$$S=\frac{k}{12}\cdot a^3=\frac{1}{12}\left(\frac{3}{a}-a\right)\cdot a^3$$

$$=\frac{1}{12}(3a^2-a^4)$$

$$=\frac{1}{12}a^2(3-a^2)$$

$$=\frac{1}{\cancel{12}}\cdot\frac{\cancel{12}}{5}\cdot\left(3-\frac{12}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{5}$$

$$=\frac{3}{25} \quad \frac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘホ}}$$

第3問

(1) $S_2=3+3\cdot 4=3+12=15$ $\boxed{アイ}$

また、$n\geqq 2$のとき

$$T_n=T_1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k=-1+\sum_{k=1}^{n-1}S_k$$

であるから

$$T_2=-1+\sum_{k=1}^{1}S_k=-1+S_1=-1+3=2 \quad \boxed{ウ}$$

$$S_n=\frac{3(4^n-1)}{4-1}=\frac{3(4^n-1)}{3}=4^n-1 \quad \boxed{エ}\boxed{オ}\boxed{カ}$$

$n\geqq 2$のとき

$$T_n=-1+\sum_{k=1}^{n-1}(4^k-1)=-1+\sum_{k=1}^{n-1}4^k-\sum_{k=1}^{n-1}1$$

$$=-1+\frac{4(4^{n-1}-1)}{4-1}-(n-1)$$

$$=-1+\frac{4^n-4}{3}-n+1$$

$$=\frac{4^n}{3}-n-1-\frac{4}{3}+1$$

$$=\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3} \quad \frac{\boxed{キ}^{②}}{\boxed{ク}},\ \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

($n=1$のときもこれでよい)

(3) $a_1=-3$,

$$na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n$$

$b_n=\dfrac{a_n+2T_n}{n}$とおくと、

$$b_1=\frac{a_1+2T_1}{1}=a_1+2T_1=-3+2\cdot(-1)$$

$$=-3-2=-5 \quad \boxed{シス}$$

$T_{n+1}=xT_n+yn+z$とおくと

$$\frac{4^{n+1}}{3}-(n+1)-\frac{4}{3}=x\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)+yn+z$$

$$\frac{4^{n+1}}{3}-n-\frac{7}{3}=x\cdot\frac{4^n}{3}-xn-\frac{4}{3}x+yn+z$$

$$=x\cdot\frac{4^n}{3}-(x-y)n-\frac{4}{3}x+z$$

これをみたす実数x, y, zの組を1つ見つければよい。(十分条件でよい)

よって、$x=4$, $x-y=1$, $-\frac{4}{3}x+z=-\frac{7}{3}$

$4-y=1$より$y=3$

$$-\frac{4}{3}\cdot 4+z=-\frac{7}{3}$$

$$z=-\frac{7}{3}+\frac{16}{3}=\frac{9}{3}=3$$

よって、

$$T_{n+1}=\underline{4}T_n+\underline{3}n+\underline{3}$$

$\boxed{セ}$ $\boxed{ソ}$ $\boxed{タ}$

ここで、$\{a_n\}$のみたす漸化式は

$$na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n\cdots\cdots ①$$

[これをb_nで表すことを考える]

$$b_n=\frac{a_n+2T_n}{n} \text{ より}$$

$$\frac{a_n+2T_n}{n}=b_n$$

$$a_n+2T_n=nb_n$$

$$a_n=nb_n-2T_n\cdots\cdots ②$$

また

$$a_{n+1}=(n+1)b_{n+1}-2T_{n+1}\cdots ②'$$

②, ②'を①に代入して

$$n\{(n+1)b_{n+1}-2T_{n+1}\}$$

$$=4(n+1)(nb_n-2T_n)+8T_n$$

$$n(n+1)b_{n+1}-2nT_{n+1}$$

$$=4n(n+1)b_n-8(n+1)T_n$$

$$+8T_n$$

$$n(n+1)b_{n+1}=4n(n+1)b_n$$

$$+(-8n-8+8)T_n+2nT_{n+1}$$

$$=4n(n+1)b_n\ \underline{-8nT_n+2nT_{n+1}}$$

$$\sim\sim =-8nT_n+2n(4T_n+3n+3)$$

$$=-8nT_n+8nT_n+6n^2+6n$$

$$=6n^2+6n$$

$$=6n(n+1)$$

よって、

$$n(n+1)b_{n+1}=4n(n+1)b_n+6n(n+1)$$

両辺を$n(n+1)$で割って

$$b_{n+1}=\underline{4}b_n+\underline{6}\quad \boxed{チ},\boxed{ツ}$$

[直接求める方法もある。
$a_1\sim a_3$, $T_1\sim T_3$を求めて与えられた漸化式に代入しよう。

$a_1=-3$, $na_{n+1}=4(n+1)a_n+8T_n$

$n=1$を代入して

$$a_2=8a_1+8T_1$$

$$=8\cdot(-3)+8\cdot(-1)$$

$$=-32$$

$n=2$を代入して

$$2a_3=12a_2+8T_2$$

$$a_3=6\cdot(-32)+4\left(\frac{4^2}{3}-2-\frac{4}{3}\right)$$

$$=-6\cdot 32+4\cdot\underbrace{(4-2)}_{T_2}$$

$$=-6\cdot 32+8=-184$$

よって、$b_1=\dfrac{a_1+2T_1}{1}=-3+2\cdot(-1)=-5$

$$b_2=\frac{a_2+2T_2}{2}=\frac{-32+2\cdot 2}{2}=-14$$

$$b_3=\frac{a_3+2T_3}{3}=\frac{-184+2\left(\frac{4^3}{3}-3-\frac{4}{3}\right)}{3}$$

$$\frac{4}{3}(4^2-1)-3=\frac{4}{3}\cdot 15-3=20-3=17$$

$$=\frac{-184+2\cdot 17}{3}$$

$$=\frac{-184+34}{3}=-\frac{150}{3}$$

$$=-50$$

$b_{n+1}=pb_n+q$ とおいて, $n=1,2$を代入

$b_2=pb_1+q$, $b_3=pb_2+q$

前ページで求めた値を代入すると

$-14=-5p+q$, $-50=-14p+q$

これを解いて $p=\underline{4}$, $q=\underline{6}$ $\boxed{チ}$ $\boxed{ツ}$]

$b_{n+1}=4b_n+6$ を変形して

$b_{n+1}+2=4(b_n+2)$

よって, 数列$\{b_n+2\}$は初項$b_1+2=-5+2=-3$, 公比4の等比数列だから

$b_n+2=-3\cdot 4^{n-1}$

$b_n=\underline{-3}\cdot\underline{4}^{n-1}\underline{-2}$ $\boxed{テト}$ $\boxed{ナ}$ $\boxed{ニ}$

したがって, $\{T_n\}$, $\{b_n\}$の一般項から$\{a_n\}$の一般項を求めよう.

前ページの②より

$a_n=nb_n-2T_n$

$=n(-3\cdot4^{n-1}-2)-2\left(\frac{4^n}{3}-n-\frac{4}{3}\right)$

$=-3n\cdot4^{n-1}-2n-\frac{2}{3}\cdot4^n+2n+\frac{8}{3}$

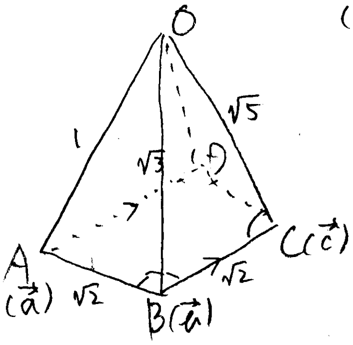
$-\frac{2}{3}\cdot4\cdot4^{n-1}$

$=4^{n-1}\left(-3n-\frac{8}{3}\right)+\frac{8}{3}$

$=-\frac{1}{3}4^{n-1}(9n+8)+\frac{8}{3}$

$=\underline{\frac{-(9n+8)\cdot4^{n-1}+8}{3}}$ $\boxed{ヌ}$〜$\boxed{ヒ}$

第4問



(1) $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$より

$\angle AOC=\underline{90°}$ $\boxed{アイ}$

よって,

$\triangle AOC=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{5}$

$=\underline{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ $\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$

(2) $\vec{BA}\cdot\vec{BC}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$=0-1-3+(\sqrt{3})^2$

$=-1-3+3=\underline{-1}$ $\boxed{オカ}$

$|\vec{BA}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=1^2-2\cdot1+(\sqrt{3})^2=1-2+3=2$

よって, $|\vec{BA}|=\underline{\sqrt{2}}$ $\boxed{キ}$,

$|\vec{BC}|^2=|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2$

$=(\sqrt{5})^2-2\cdot3+(\sqrt{3})^2$

$=5-6+3=2$

よって,

$|\vec{BC}|=\underline{\sqrt{2}}$ $\sqrt{\boxed{ク}}$

よって,

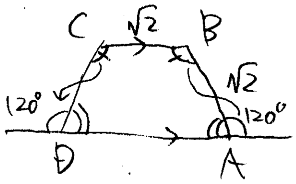
$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|\cos\angle ABC$より

$-1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\angle ABC$

$2\cos\angle ABC=-1$

$\cos\angle ABC=-\frac{1}{2}$

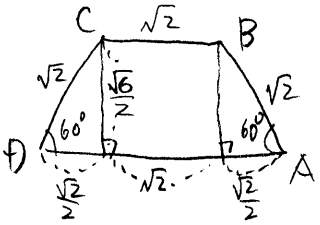
従って, $\angle ABC=\underline{120°}$ $\boxed{ケコサ}$



$\angle BAD=\angle ADC$

$=180°-120°$

$=\underline{60°}$ $\boxed{シス}$°



左図より

$AD = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 2\sqrt{2}$

$= 2BC$

よって、$\overrightarrow{AD} = \underline{2}\overrightarrow{BC}$ $\boxed{セ}$

始点をO(オウ)にかえて

$\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$

$= \vec{a} - \underline{2}\vec{b} + \underline{2}\vec{c}$

$\boxed{ソ}$ $\boxed{タ}$

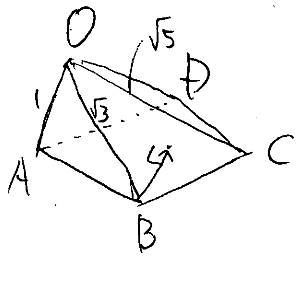
四角形ABCDの面積は上の図より

$\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$

$= \frac{3}{4} \cdot \sqrt{12}$

$= \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt{3}$

$= \underline{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$ $\quad \frac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$



BH⊥OAより

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = \underline{0}$ $\boxed{ト}$

BH⊥OCより

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = 0$

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OB} = s\vec{a} + t\vec{c} - \vec{b}$ より

$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{a} = (s\vec{a} + t\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{a}$

$= s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}$

$= s \cdot 1^2 + t \cdot 0 - 1 = s - 1$

これが0だから $s - 1 = 0$

よって $s = \underline{1}$ $\boxed{ナ}$

また、$\overrightarrow{BH} \cdot \vec{c} = (s\vec{a} + t\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$

$= s\vec{a} \cdot \vec{c} + t|\vec{c}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c}$

$= s \cdot 0 + t(\sqrt{5})^2 - 3$

$= 5t - 3$

これが0に等しいから $5t - 3 = 0$

よって、$t = \underline{\frac{3}{5}}$ $\boxed{ニヌ}$

すると

$\overrightarrow{BH} = \vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c} - \vec{b}$

であるから

$|\overrightarrow{BH}|^2 = |\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c} - \vec{b}|^2$

$= |\vec{a}|^2 + \frac{9}{25}|\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2$

$+ 2 \cdot \vec{a} \cdot \frac{3}{5}\vec{c} - 2 \cdot \frac{3}{5}\vec{c} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$= 1^2 + \frac{9}{25} \cdot (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2$

$+ \frac{6}{5} \cdot 0 - \frac{6}{5} \cdot 3 - 2 \cdot 1$

$= 1 + \frac{9}{5} + 3 - \frac{18}{5} - 2$

$= -\frac{9}{5} + 2 = \frac{1}{5}$

よって、

$|\overrightarrow{BH}| = \sqrt{\frac{1}{5}} = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$ $\quad \frac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}$

従って、

$V = \frac{1}{3} \times \triangle AOC \times |\overrightarrow{BH}|$

$= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\frac{1}{6}}$ $\quad \frac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}}$

(4) 点Dから平面OACに垂線DH'を下す。

$\overrightarrow{DH'} // \overrightarrow{BH}$ だから

$\overrightarrow{DH'} = k\overrightarrow{BH}$ (kは実数)

$\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OD}=k(\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}-\vec{b})$

$\overrightarrow{OH'}=k\vec{a}+\frac{3}{5}k\vec{c}-k\vec{b}+\overrightarrow{OD}$

$=k\vec{a}-k\vec{b}+\frac{3}{5}k\vec{c}-(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$

$=(k-1)\vec{a}-(k-2)\vec{b}+(\frac{3}{5}k-2)\vec{c}$

点H′は面AOC上にあるから，$\vec{b}$の係数は0.

よって，$k-2=0$，$k=2$

従って，$DH'=2BH$

すると，四角錐D-OACの体積は

$\frac{1}{3}\cdot\triangle OAC\cdot 2BH=2V$

ゆえに，四角錐OABCDの体積は

$V+2V=3V$ $\boxed{フ}$

と表わせる.

$3V=3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$であるから，題意の高さを$h$とすると

$\frac{1}{3}(四角形ABCD)\times h=3V=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}\cdot h=\frac{1}{2}$

(×2)

$\sqrt{3}h=1$

$h=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\frac{\sqrt{\boxed{ヘ}}}{\boxed{ホ}}$

(以上)

毎年のことですが，数列とベクトルの後半の計算が半端ない。計算スペースがほとんどない上に，時間に追われて実力が出し切れなかった受験生が多かったのではないでしょうか。この手の問題はもはや数学ではなく，単なるパズルだと思います。くたばれ！センター数学！