平成30年度センター試験数学IA解答

第1問

〔1〕 $A=x(x+1)(x+2)(5-x)$

$\times(6-x)(7-x)$

$(x+n)(n+5-x)$

〔nで整理してから展開〕

$=(n+x)\{n+(5-x)\}$

$=n^2+\{x+(5-x)\}n+x(5-x)$

$=n^2+5n+x(5-x)$

$=x(5-x)+n^2+\underline{5}n$ $\boxed{ア}$

したがって $X=x(5-x)$ とおくと

$A=x(5-x)\times(x+1)(6-x)$

$\times(x+2)(7-x)$

$=X\times(x+1)\{(5-x)+1\}$

$\times(x+2)\{(5-x)+2\}$

ムリヤリ $x(5-x)$ をつくる

$=X\times\{x(5-x)+x+5-x+1\}$

$\times\{x(5-x)+2x+2(5-x)+4\}$

$=X(X\underline{+6})(X\underline{+14})$

$\boxed{イ}$ $\boxed{ウエ}$

$x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ のとき

$2x=5+\sqrt{17}$

$2x-5=\sqrt{17}$

両辺を平方すると

$(2x-5)^2=(\sqrt{17})^2$

$4x^2-20x+25=17$

$4x^2-20x+8=0$

$(\div 4)$

$x^2-5x+2=0$

$x(x-5)=-2$

$x(5-x)=2$

よって, $X=\underline{2}$ $\boxed{オ}$

$A=2\cdot(2+6)\cdot(2+14)$

$=2\cdot8\cdot16$

$=2^1\cdot2^3\cdot2^4$

$=2^{1+3+4}$

$=2^{\underline{8}}$ $\boxed{カ}$

〔2〕

$U=\{1,2,3,\cdots,20\}$

$A=\{1,2,4,5,10,20\}$

$B=\{3,6,9,12,15,18\}$

$C=\{2,4,6,8,10,\cdots,20\}$

[2]のつづき

(a) $A \not\subset C$ より誤

(b) $A \cap B = \phi$ より正

よって、② $\boxed{答}$

(c) $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

だから

$(A \cup C) \cap B = \{6, 12, 18\}$

よって、正.

$\overline{A} \cap C = \{6, 8, 12, 14, 16, 18\}$ だから

$(\overline{A} \cap C) \cup B = \{3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\}$

$B \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18\}$ より

$\overline{A} \cap (B \cup C) = \{3, 6, 8, 9, 12, 14, 15, 16, 18\}$

よって、正.

答えは ⓪ $\boxed{ク}$

(2) p: $x-2<-2$ または $2<x-2$

よって、

$x<0$ または $4<x$

s: $|x|>4 \Leftrightarrow x<-4$ または $4<x$

q または r: $x<0,\ 4<x$

これは p と同値. よって、答えは② $\boxed{ケ}$

$s \Rightarrow r$, $r \not\Rightarrow s$ だから答えは⓪ $\boxed{コ}$

[3] $f(x) = ax^2 - 2(a+3)x - 3a + 21$

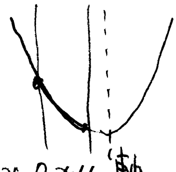
$$= a\left(x^2 - \frac{2(a+3)}{a}x\right) - 3a + 21$$

$$= a\left\{\left(x - \frac{a+3}{a}\right)^2 - \left(\frac{a+3}{a}\right)^2\right\} - 3a + 21$$

よって、$p = \dfrac{a+3}{a} = 1 + \dfrac{3}{a}$ $\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$

$a>0$ より、最小値が $f(4)$ となるのは

$1 + \dfrac{3}{a} \geqq 4$ のときである.



よって、

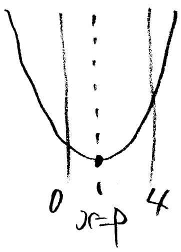
$a + 3 \geqq 4a$

$-3a \geqq -3$

$a \leqq 1$

従って、$0 < a \leqq 1$ $\boxed{ス}$

最小値が $f(p)$ となるのは



$0 \leqq p \leqq 4$

$0 \leqq 1 + \dfrac{3}{a} \leqq 4$

$a>0$ より左の不等号は常に成り立つ。

[3]のつづき

$1+\frac{3}{a} \leqq 4$ (上の$\boxed{ス}$の計算より)

$1 \leqq a$ $\boxed{セ}$

(i) $0<a\leqq 1$ のとき

$f(4)=1$ より

$a\cdot 4^2-2(a+3)\cdot 4-3a+21=1$

$16a-8(a+3)-3a+21=1$

16	
-8	-24
-3	21
	-1
5	-4

$5a-4=0$

$a=\frac{4}{5}$ $\frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$

これは $0<a\leqq 1$ をみたす。

(ii) $1\leqq a$ のとき

$f(p)=-\frac{(a+3)^2}{a}-3a+21=1$

両辺にaをかけて

$-(a+3)^2-3a^2+21a=a$

-1	-6	-9
-3	21	
	-1	
-4	14	-9

$-4a^2+14a-9=0$

$4a^2-14a+9=0$

よって,

$a=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times 9}}{4}$

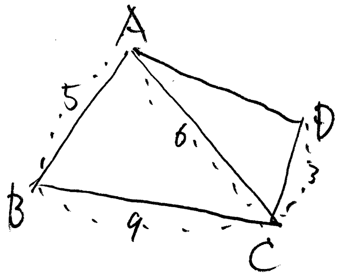
$=\frac{7\pm\sqrt{49-36}}{4}$

$=\frac{7\pm\sqrt{13}}{4}$

$4<\sqrt{17}<5$ より $1\leqq a$ をみたすのは

$a=\frac{7+\sqrt{13}}{4}$ $\frac{\boxed{チ},\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}$

第2問



余弦定理により

$\cos\angle ABC=\frac{5^2+9^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 9}=\frac{25+81-36}{2\cdot 5\cdot 9}$

$=\frac{70}{2\cdot 5\cdot 9}$

$=\frac{7}{9}$ $\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

$\sin\angle ABC>0$ より

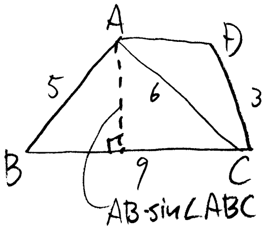
$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{49}{81}}$

$=\sqrt{\frac{32}{81}}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$ $\frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}}}{\boxed{オ}}$

[1] のつづき

AD // BC とすると



CD ≧ AB·sin∠ABC となることが必要.

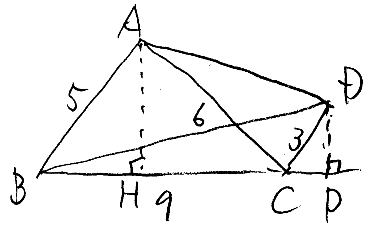
$AB\cdot\sin\angle ABC = 5\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

$= \dfrac{20\sqrt{2}}{9}$

$\left(\dfrac{20\sqrt{2}}{9}\right)^2 = \dfrac{800}{81} > 9$ より

CD < AB·sin∠ABC だから ⓪ $\boxed{\text{カ}}$

AD ∦ BC. よって, AB // CD ④ $\boxed{\text{キ}}$



点A, 点Dからそれぞれ直線BCに垂線AH, DPを下す.

△ABH ∽ △DCP より

AH : DP = AB : DC

よって, AH = AB·sin∠ABC より

$\dfrac{20\sqrt{2}}{9} : DP = 5 : 3$

$5DP = \dfrac{20\sqrt{2}}{9}\cdot 3$

$DP = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

また $BH = AB\cos\angle ABC$

$= 5\cdot\dfrac{7}{9} = \dfrac{35}{9}$

より

BH : CP = AB : DC

$\dfrac{35}{9} : CP = 5 : 3$

$5CP = \dfrac{35}{9}\cdot 3$

$CP = \dfrac{7}{3}$

従って, $BP = BC + CP = 9 + \dfrac{7}{3} = \dfrac{34}{3}$.

△BPD で三平方を用いて

$BD^2 = BP^2 + DP^2$

$= \left(\dfrac{34}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$= \dfrac{2^2\cdot 17^2}{9} + \dfrac{16\cdot 2}{9} = \dfrac{4}{9}(17^2 + 8)$

$= \dfrac{4}{9}\cdot(289 + 8) = \dfrac{4\cdot 297}{9}$

$= 4\cdot 33$

よって, BD > 0 より

$BD = 2\sqrt{33}$ $\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$

[2] 1つずつ確かめていくしか方法がありません。やれやれ。

⓪ 範囲 = (最大値 − 最小値) より

[2]のつづき

⓪について

男短　202－152＝50

男長　198－155＝43

女短　187－145＝42

女長　186－151＝35

よって，誤り．

①について，

(四分位範囲)＝(第3四分位数)
－(第1四分位数)

[箱ひげ図を見ます]

男短　186－176＝10

男長　181－172＝9

女短　174－165＝9

女長　170－161＝9

よって，正しい．

②　箱ひげ図→ヒストグラムの順に見ます．

男長は，中央値176 ⇒ 度数2番目

よって，誤り．

③について，

女長の第1四分位数161は度数が2番目の階級に入っている．

よって，誤り．

④について．最も身長の高い選手202cmは男子短距離に属している．

よって，誤り．

⑤について，最も身長の低い選手は145cmで，女子短距離に属している．

よって，誤り．

⑥　男短の中央値は181，
男長の第3四分位数は181．

よって，正しい．

以上から，答えは ①，⑥ ㋚，㋛

(2) これも1つ1つ見ていくしか方法がありません。

zが l_1，l_2，l_3，l_4 の傾きであることに気づかないと解ません．しかし，気づくと楽勝です．

⓪　x，wともに右上りになって

(2)のつづき

いるので正の相関がある.

よって，誤り.

① 中央値が一番大きいのは(a)の箱ひげ図。最大値30なので，散布図で傾き30の直線ℓ_4上にデータがあるものを探すと，男子短距離グループ.

よって誤り. ((a)男短)

② その範囲(=最大値−最小値)を調べる. 箱ひげ図を見ます.

(a)男短 $30-17.2=12.8$

(b) $26.2-15.5=10.7$

(c) $28.8-16.4=12.4$

(d) $23.2-15.2=8.0$

(d)は最大値23.2，全体的に20以下が多いので，散布図で傾き20の直線ℓ_2より下方に集っているものを探すと，女子長距離. ((d)女長)

よって，誤り.

③ (四分位範囲)=(第3四分位数)−(第1四分位数)

(a) $24.2-21.6=2.6$

(b) $21.5-19.6=1.9$

(c) $21.0-19.1=1.9$

(d) $19.3-17.7=1.6$

最小は(d)女子長距離だから，誤り.

④ 女子長距離(d)の最大値は25より小さい. よって，正しい.

⑤ (c)は最大値27.3なので，直線ℓ_4のすぐ下にデータがあり，最小値が16.3なので，直線ℓ_1よりかなり上にデータがある散布図は男子長距離. よって，正しい.

以上から，答えは ④，⑤ $\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$

(3)

$(x_1-\bar{x})(w_1-\bar{w})+(x_2-\bar{x})(w_2-\bar{w})$
$+\cdots+(x_n-\bar{x})(w_n-\bar{w})$

$$\left.\begin{aligned}&=(x_1w_1-x_1\bar{w}-\bar{x}w_1+\bar{x}\bar{w})\\&+(x_2w_2-x_2\bar{w}-\bar{x}w_2+\bar{x}\bar{w})\\&+\cdots\\&+(x_nw_n-x_n\bar{w}-\bar{x}w_n+\bar{x}\bar{w})\end{aligned}\right\} n\text{個}$$

(たてに足します)

$= x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_2$
$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\bar{w}$ ← $\bar{w}$でくくる.

(3)のつづき

$\bar{x}$でくくる

$-(w_1+w_2+\cdots+w_n)\bar{x}+n\bar{x}\bar{w}$

$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n$

$\quad -n\bar{x}\bar{w}-n\bar{x}\bar{w}+n\bar{x}\bar{w}$

$=x_1w_1+x_2w_2+\cdots+x_nw_n-\underline{n\bar{x}\bar{w}}$

よって、$\boxed{ソ}$は②

$\boxed{第3問}$ (大,小)とする

(1) $A=\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\}$より $P(A)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}\quad \dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

$B=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$より

$\therefore P(B)=\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}\quad \dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$

$C=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$\therefore P(C)=\dfrac{4}{6^2}=\dfrac{1}{9}\quad \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$

(2) $P_C(A)=\dfrac{P(C\cap A)}{P(C)}$ だから、

$P(C\cap A)$を求めよう

$C\cap A=\{(4,5)\}$

$P(C\cap A)=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

よって、$P_C(A)=\dfrac{P(C\cap A)}{P(C)}=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}}=\dfrac{1}{36}\times\dfrac{9}{1}$

$=\dfrac{1}{4}\quad \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$

$P_A(C)=\dfrac{P(A\cap C)}{P(A)}=\dfrac{P(C\cap A)}{P(A)}$

$=\dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\dfrac{1}{\cancel{36}_{6}}\times\dfrac{\cancel{6}^{1}}{1}=\dfrac{1}{6}\quad \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$

(3) $A\cap B=\{(4,3)\}$より $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6^2}=\dfrac{1}{36}$

$P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$

よって、$\boxed{サ}$は①

$P(A)\cdot P(C)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{54}$

$P(A\cap C)=\dfrac{1}{36}$ より

$\boxed{シ}$は②

(4) $n(\bar{A}\cap C)=n(C)-n(A\cap C)$

$=4-1=3$

よって、$P(\bar{A}\cap C)=\dfrac{3}{6^2}=\dfrac{1}{12}$

[または、$P(\bar{A}\cap C)=P(C)-P(A\cap C)$ でもOK]

よって、

$P(A\cap B)\cdot P(\bar{A}\cap C)=\dfrac{1}{36}\cdot\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{432}\quad \dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セソ}}$

$\begin{array}{r}144\\ \times\ 3\\ \hline 432\end{array}$

$P(A\cap B)\cdot P(\bar{A}\cap C)+P(\bar{A}\cap B)\cdot P(A\cap C)$

を求めればよい。

$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{36}=\dfrac{5}{36}$

よって、答えは

(4)のつづき

$\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{12}+\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{36}$

$=\frac{1}{36}\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{36}\right)$

$=\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{3}{36}+\frac{5}{36}\right)$

$=\frac{1}{\cancel{36}\,9}\cdot\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{36}\,9}=\underline{\frac{1}{81}}$ $\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$

第4問

(1) $144=12^2=(2^2\times3)^2$

$=\underline{2^4\times3^2}$ $\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}},\boxed{\text{ウ}}$

正の約数の個数は

$(4+1)\times(2+1)=5\cdot3=\underline{15}$ $\boxed{\text{エオ}}$

(2) $144x-7y=1\cdots⓪$

20	144 140	7 4	1
1	4 3	3	
	1		

$144-7\times20=4\ \cdots①$

$7-4\times1=3\ \cdots②$

$4-3\times1=1\ \cdots③$

①の4を②の4に代入

$7-(144-7\times20)=3$

$-144+7\times21=3\ \cdots②'$

②'の3を③の3に代入

①の4と②'の3を③に代入すると

他にも方法があります。

$(144-7\times20)-(-144+7\times21)\times1=1$

$144\times2-7\times41=1\ \cdots④$

⓪−④より

$144(x-2)-7(y-41)=0\ \cdots⑤$

144と7は互いに素だから $x-2$ は7の倍数。$x-2=7k$（kは整数）…⑥ とおく。⑥を⑤に代入

$144\cdot7k-7(y-41)=0$

両辺を7で割って

$144k-(y-41)=0$

よって、$y=144k+41\ \cdots⑦$

また、⑥より $x=7k+2\ \cdots⑧$

xの絶対値が最小になるのは $k=0$ のときである。

$x=\underline{2}$ $\boxed{\text{カ}}$, $y=\underline{41}$ $\boxed{\text{キク}}$

また、

$x=\underset{\boxed{\text{ケ}}}{\underline{7}}k+2,\quad y=\underset{\boxed{\text{コサシ}}}{\underline{144}}k+41$

(3) ⓪より

$144x=7y+1$

また (1) $\boxed{\text{ケ}}$ より $144(7k+2)$ は 7で割ったら1余る。

$144(7k+2)=2^4\times3^2\times(7k+2)$

で少なくとも正の約数の個数は $(4+1)\times(2+1)=15$ 個。

$7k+2$ が 2, 3 以外の素因

(3)のつづき

数をもてば $15\times2=30$ 個以上になる.

よって,

$18=6\times3$ より,

$144\cdot(7k+2)=2^5\cdot3^2\ (=2^4\cdot3^2\times2)$ のとき

$7k+2$ ← 7で割って2余る数

$144(7k+2)$ は最小となる.

よって, $144\times\underline{2}$ $\boxed{ス}$

$7k+2$ に $2, 9, 16, 23, \cdots$ を代入していくと

$k=0$ のとき $144\cdot2=2^5\cdot3^2$ × $6\cdot3=18$ 個

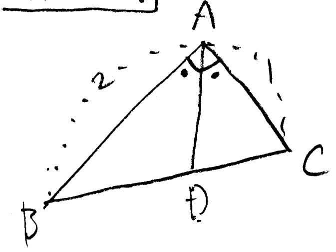
$k=1$ のとき $144\cdot9=2^4\cdot3^4$ × $5\cdot5=25$ 個

$k=2$ のとき $144\cdot16=2^8\cdot3^2$ × $9\cdot3=27$ 個

$k=3$ のとき $144\cdot23=2^4\cdot3^2\cdot23$ ○ $5\cdot3\cdot2=30$ 個

よって, $144\times\underline{23}$ $\boxed{セソ}$

$\boxed{第5問}$



AD は ∠BAC の2等分線だから

$BD:DC=AB:AC=2:1$

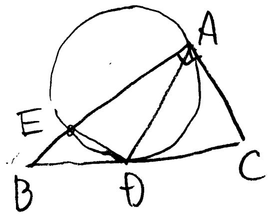
また, 三平方の定理より

$BC^2=2^2+1^2=5$

$BC>0$ より $BC=\sqrt{5}$

よって,

$BD=\dfrac{2}{2+1}\times\sqrt{5}=\underline{\dfrac{2\sqrt{5}}{3}}$ $\dfrac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$



方べきの定理より

$BE\cdot BA=BD^2$

$=\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2$

$=\dfrac{4\cdot5}{9}=\dfrac{20}{9}$

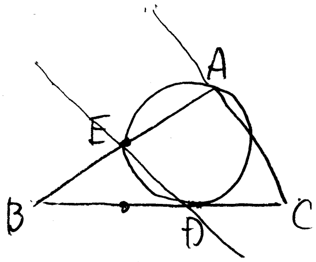
よって, $AB\cdot BE=\underline{\dfrac{20}{9}}$ $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}$

$\boxed{\text{第5問}}$のつづき

AB=2より

$2BE=\frac{20}{9}$

$BE=\frac{10}{9}$ $\frac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}$



$\frac{BE}{BD}=\frac{\frac{10}{9}}{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=\frac{\cancel{10}^{5}}{\cancel{9}_{3}}\cdot\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{2}_{1}\sqrt{5}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}$

$=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{5}}{3\cdot 5}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

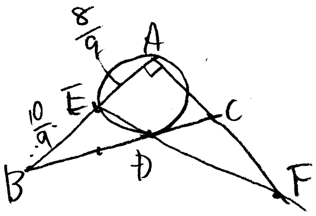
$\left(\frac{BE}{BD}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$, $\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{4}{5}$

$\frac{5}{9}<\frac{4}{5}$ より

$\frac{BE}{BD}<\frac{AB}{BC}$

よって, $\boxed{コ}$ は ⓪

直線DEより直線ACの方が傾きが急(右下りの割合が大)だから, C の側の延長上にある. よって, $\boxed{サ}$ は ④



メネラウスの定理より

$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BE}{EA}=1$

よって,

$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{10}{9}}{\frac{8}{9}}=1$

$\frac{AF}{FC}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}=1$

$\frac{AF}{FC}=\frac{8}{5}$

よって

$\frac{CF}{AF}=\frac{5}{8}$ $\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$

CF : AC = 5 : 3 より

$CF=\frac{5}{3}AC=\frac{5}{3}$ $\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$

△ABFにて三平方の定理を用いて

$BF^2=AB^2+AF^2$

$=2^2+\left(1+\frac{5}{3}\right)^2$

$=2^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2$

$=4+\frac{64}{9}$

$=\frac{100}{9}$

$\boxed{第5問}$ のつづき (2)

$BF>0$ より $BF=\frac{10}{3}$

すると

$\frac{CF}{AC}=\frac{5}{3}$, $\frac{BF}{AB}=\frac{\frac{10}{3}}{2}=\frac{5}{3}$ より

$\frac{CF}{AC}=\frac{BF}{AB}$ が成り立つ

よって、BCは∠ABFの2等分線である。

従って、点Dは△ABFの内心であるから $\boxed{タ}$ は ①

(以上)