2015 センター試験 本試験

数学II・数学B

第1問

[1]

(1)「垂直 $\Leftrightarrow$ 傾きの積が -1」だから

題意の直線の方程式は

$$y=\underline{-\frac{3}{4}}(x-p)+q \quad \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}p+q \cdots ①$$

① と $l: y=\frac{4}{3}x$ から y を消去すると

$$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}p+q$$

$(\times 12)$ $16x=-9x+9p+12q$

$$\Leftrightarrow \quad x=\frac{9}{25}p+\frac{12}{25}=\frac{3}{25}(\underline{3}p+\underline{4}q) \quad \boxed{ウ},\boxed{エ}$$

$y=\frac{4}{3}x$ に代入して

$$y=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{25}(3p+4q)=\frac{4}{25}(3p+4q)$$

$Q\left(\frac{3}{25}(3p+4q), \frac{4}{25}(3p+4q)\right)$ であるから

$$PQ^2=\left\{p-\frac{3}{25}(3p+4q)\right\}^2+\left\{q-\frac{4}{25}(3p+4q)\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{4}{25}(4p-3q)\right\}^2+\left\{-\frac{3}{25}(4p-3q)\right\}^2$$

$$=\frac{4^2}{25^2}(4p-3q)^2+\frac{3^2}{25^2}(4p-3q)^2$$

$$=\frac{25}{25^2}(4p-3q)^2=\frac{1}{25}(4p-3q)^2$$

よって、$r=PQ=\left|\frac{1}{25}(4p-3q)\right|=\frac{1}{5}|\underline{4}p-\underline{3}q| \quad \boxed{オ},\boxed{カ}$

(2) 点Pは直線 l より下方にあるから領域 $y<\frac{4}{3}x$ 内にある。よって、$q<\frac{4}{3}p \Leftrightarrow 4p-3q>0$

よって，$r = q = \frac{1}{5}(4p-3q)$

$\Leftrightarrow 5q = 4p - 3q \Leftrightarrow 4p = 8q$

$\Leftrightarrow p = \underline{2q}$ $\boxed{キ}$

Cの方程式は

$(x-2q)^2 + (y-q)^2 = q^2 \ (q>0)$

点R(2,2)を通るので

$(2-2q)^2 + (2-q)^2 = q^2$

$$\begin{array}{rrrr} & 4 & -8 & 4 \\ & 1 & -4 & 4 \\ +) & -1 & & \\ \hline 4) & 4 & -12 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & 2 \end{array}$$

$q^2 - 3q + 2 = (q-1)(q-2) = 0$

よって，$q = 1, 2$

従ってCの方程式は

$(x-\underline{2})^2 + (y-\underline{1})^2 = \underline{1}$ $\boxed{ク}, \boxed{ケ}, \boxed{コ}$

または

$(x-\underline{4})^2 + (y-\underline{2})^2 = \underline{4}$ $\boxed{サ}, \boxed{シ}, \boxed{ス}$

(3) S(2,1), T(4,2)であるから

OS : ST = 2 : 2 = 1 : 1

よって，SO : OT = 1 : 2 であるから点Oは線分STを <u>1 : 2に外分する</u> ④ $\boxed{セ}$

[2] $\log_2 m^3 + \log_3 n^2 \leqq 3 \quad \cdots ④$

$m=2, n=1$ のとき $\log_2 2^3 + \log_3 1^2 = 3 + 0 = \underline{3}$ $\boxed{ソ}$

$m=4, n=3$ のとき $\log_2 4^3 + \log_3 3^2 = 3 \cdot 2 + 2 = \underline{8}$ $\boxed{タ}$

④を変形して

$3\log_2 m + 2\log_3 n \leqq 3$

よって $\log_2 m + \underline{\frac{2}{3}}\log_3 n \le \underline{1}$ …⑤

$\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$ $\boxed{テ}$

n が自然数のとき, $\log_3 n$ は $n=1$ のとき最小値 $\log_3 1 = \underline{0}$ をとる. $\boxed{ト}$

よって, ⑤より $\log_2 m \le 1 \iff m \le 2$ (底 $2>1$ だから)

従って $m = \underline{1}, \underline{2}$ $\boxed{ナ}$, $\boxed{ニ}$

$m=1$ のとき, $\log_2 m = \log_2 1 = 0$ だから⑤より $\frac{2}{3}\log_3 n \le 1$

よって, $\log_3 n \le \underline{\frac{3}{2}}$ $\frac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ $\iff n \le 3^{\frac{3}{2}}$ (底 $3>1$ だから)

両辺を2乗して

$n^2 \le (3^{\frac{3}{2}})^2 = 3^3 = \underline{27}$ $\boxed{ノハ}$

よって, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ より $n \le \underline{5}$ $\boxed{ヒ}$

$m=2$ のとき, ⑤は $\log_2 2 + \frac{2}{3}\log_3 n \le 1 \iff 1 + \frac{2}{3}\log_3 n \le 1$

よって $\frac{2}{3}\log_3 n \le 0$ つまり $\log_3 n \le 0$

n は自然数だから $n \ge 1$, すると $\log_3 n \ge \log_3 1 = 0$

よって, $\log_3 n = 0$ としかなりえない

ゆえに $n=1$

従って m, n の組の個数は $\underline{1}$ である. $\boxed{フ}$

以上から, ④を満たす自然数 m, n の組の個数は

$5+1 = \underline{6}$ である. $\boxed{ヘ}$

第2問

$f(x) = x^3 - px$ (p は実数)

$f'(x) = \underline{3x^2} - p$ $\boxed{ア}$ $\boxed{イ}$

(1) $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば, $f'(a) = \underline{0}$ $\boxed{ウ}$ が成り立つ.

$3a^2-p=0$ を満たす実数 a が存在するためには

$p \geqq 0$

が必要である．$p=0$ のとき，$f'(x)=3x^2 \geqq 0$ となって

$f(x)$ は極値をもたない．

よって，$p>0$

このとき $f'(x)=0$ を解くと $x=\pm\sqrt{\frac{p}{3}}$．

a がどちらの値をとっても，その前後で $f'(x)$ の符号が

変わる．よって，$x=a$ で極値をとる条件は

$\underline{p>0}$ ① $\boxed{エ}$

※こんな面倒くさい考察は必要なし．ふつうは，

「$f'(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつ」ことから

いきなり $p>0$ とすればよい．

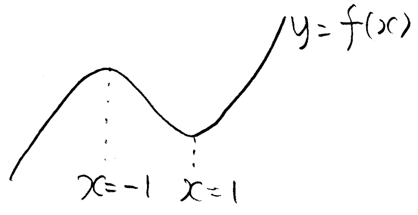
(2) $f(x)$ が $x=\frac{p}{3}$ で極値をとるとすると，

$f'\left(\frac{p}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{p}{3}\right)^2-p=0 \Leftrightarrow \frac{p^2}{3}-p=0$

$\Leftrightarrow p^2-3p=p(p-3)=0$

$\boxed{エ}$ より $p>0$ だから $p=\underline{3}$ $\boxed{オ}$

すると，$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ より



$f(x)$ は $x=\underset{\boxed{カキ}}{\underline{-1}}$ で極大値をとり，$\underset{\boxed{ク}}{\underline{x=1}}$ で極小値をとる．

$f(1)=1^3-3\cdot1=-2$ だから $A(1,-2)$

接点 $(t, f(t))$ より l の方程式は

$$y-f(t)=(3t^2-3)(x-t)$$

$$y=(\underline{3}t^2-\underline{3})(x-t)+f(t) \quad \boxed{ケ},\boxed{コ}$$

$f(t)=t^3-3t$ より

$$l: y=(3t^2-3)x-(3t^2-3)t+(t^3-3t)$$

$$\Leftrightarrow \ y=(3t^2-3)x-2t^3 \cdots\cdots ①$$

点A$(1,-2)$を通るから

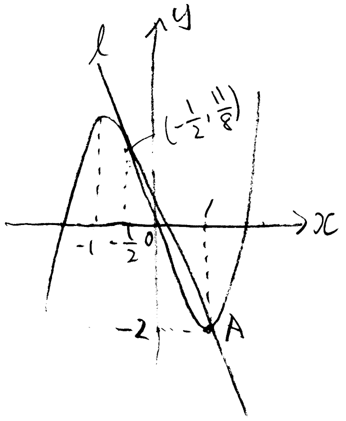
$$-2=(3t^2-3)\cdot 1-2t^3$$

$$\Leftrightarrow \ \underline{2}t^3-\underline{3}t^2+1=0 \quad \boxed{サ},\boxed{シ}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
1 & 2 & -3 & 0 & 1 \\
 & & 2 & -1 & -1 \\
\hline
1 & 2 & -1 & -1 & \boxed{0} \\
 & & 2 & 1 & \\
\hline
 & 2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(2t+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \ t=\underline{1},\ -\underline{\frac{1}{2}} \quad \boxed{ス},\ \frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$$



l の傾き $3t^2-3 \neq 0$ より $t \neq \pm 1$

よって, $t=-\dfrac{1}{2}$

ゆえに, l の方程式は①より

$$y=\left\{3\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\right\}x-2\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

すなわち

$$y=\underline{-\frac{9}{4}}x+\underline{\frac{1}{4}} \quad \frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}},\ \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$$

D の方程式を $y=A(x-1)^2-2$ (Aは定数) とおくと,

原点を通るから

$$0=A(0-1)^2-2 \Leftrightarrow A=2$$

よって, D の方程式は

$$y=2(x-1)^2-2=\underline{2x^2-4x} \quad \boxed{ニ},\boxed{ヌ}$$

$2x^2-4x=-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}$ を解くと

$8x^2-16x=-9x+1$

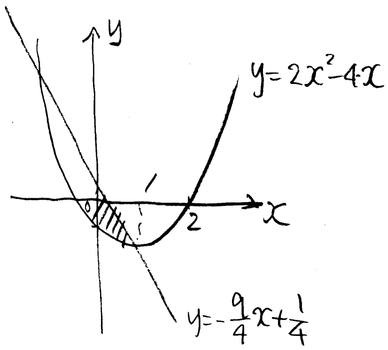
$8x^2-7x-1=0$

$(x-1)(8x+1)=0$

$x=1,-\frac{7}{8}$

よって、

$$S=\int_0^1\left\{\left(-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(2x^2-4x)\right\}dx$$



$$=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}=\frac{-16+21+6}{24}$$

$$=\underline{\frac{11}{24}}\quad\boxed{ネノ}$$

第3問

$a_1=6,\quad a_{n+1}-a_n=9+(n-1)\cdot 4=4n+5$

(1) $a_1\ \ a_2\ \ a_3\ \ a_4,\cdots$

$+9\ \ +13\ \ +17$

より、

$a_2=a_1+9=6+9=\underline{15}$ $\boxed{アイ}$

$a_3=a_2+13=15+13=\underline{28}$ $\boxed{ウエ}$

$a_{n+1}-a_n=\underline{4}n+\underline{5}$ より $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=6+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+5)$$

$= 6 + \frac{1}{2}(n-1)\{9 + (4n+1)\}$

$= 6 + \frac{1}{2}(n-1)(4n+10)$

$= 6 + (n-1)(2n+5)$

$= \underline{2n^2+3n+1}$ $\boxed{キ}, \boxed{ク}, \boxed{ケ}, \boxed{コ}$

($n=1$のときもこれでよい)

(2) $b_{n+1} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}-1} b_n$

$= \dfrac{2n^2+3n+1}{2(n+1)^2+3(n+1)+1-1} b_n$

$= \dfrac{(n+1)(2n+1)}{2n^2+7n+5} b_n$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 2 \\ & 3 & 3 \\ \hline 2 & 7 & 5 \end{array}$$

$= \dfrac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+5)} b_n$

$= \underline{\dfrac{2n+1}{2n+5}} b_n$ $\boxed{セ}\boxed{ソ}\boxed{タ}$ …③

$b_2 = \dfrac{2\cdot1+1}{2\cdot1+5} b_1 = \dfrac{3}{7}\cdot\dfrac{2}{5} = \underline{\dfrac{6}{35}}$ $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$

ここで $c_n = (2n+1)b_n$とすると③より

$\dfrac{c_{n+1}}{2n+3} = \dfrac{\cancel{2n+1}}{2n+5} \cdot \dfrac{c_n}{\cancel{2n+1}}$

$\Leftrightarrow (2n+\underline{5})c_{n+1} = (2n+\underline{3})c_n$ $\boxed{チ}\boxed{ツ}$

$d_n = (2n+\underline{3})c_n$とおくと $\boxed{テ}$

$d_{n+1} = d_n$

$d_1 = (2\cdot1+3)c_1 = 5\cdot(2\cdot1+1)b_1 = 15\cdot\frac{2}{5} = \underline{6}$ $\boxed{ト}$ より

$d_n = 6$

よって $c_n = \dfrac{6}{2n+3} \Leftrightarrow b_n = \dfrac{c_n}{2n+1} = \dfrac{6}{(2n+1)(2n+3)}$

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}=\frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}$$

$$=\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$

であるから

$$b_n=3\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$

$$=\underline{\frac{3}{2n+1}-\frac{3}{2n+3}}\quad\boxed{\text{ナ}}\boxed{\text{ニ}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k+1}-\frac{3}{2k+3}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{3}-\cancel{\frac{3}{5}}\right)$$

$$+\left(\cancel{\frac{3}{5}}-\cancel{\frac{3}{7}}\right)$$

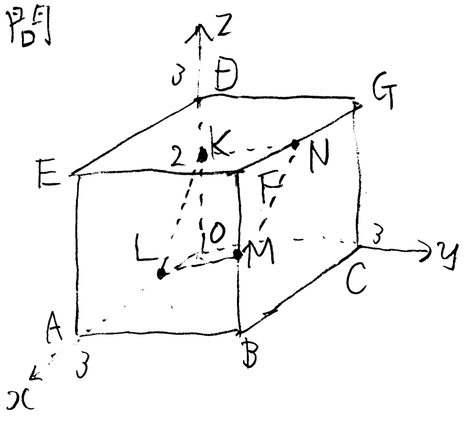
$$+\ \cdots$$

$$\vdots\qquad\vdots$$

$$+\left(\cancel{\frac{3}{2n+1}}-\frac{3}{2n+3}\right)$$

$$=1-\frac{3}{2n+3}=\underline{\frac{3}{2n+3}}\quad\boxed{\text{ヌ}}\ \boxed{\text{ネ}}\boxed{\text{ノ}}$$

第4問



$$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OL}$$

$$=(0,0,2)-(1,0,0)$$

$$=\underline{(-1,0,2)}\quad\boxed{\text{アイ}}\boxed{\text{ウ}}\boxed{\text{エ}}$$

四角形KLMNが平行四辺形であることにより $\overrightarrow{LK}=\underline{\overrightarrow{MN}}$ ③ $\boxed{\text{オ}}$

M(3, 3, 5), N(t, 3, 3) とすると

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$=(t,3,3)-(3,3,s)$

$=(t-3,0,3-s)$

$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{MN}$ より

$t-3=-1,\ 3-s=2$

よって，$s=\underline{1},t=\underline{2}$ $\boxed{カ}\boxed{キ}$

NはFGを $1:\underline{2}$ に内分する. $\boxed{ク}$

$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}$

$=(3,3,1)-(1,0,0)$

$=(2,3,1)$

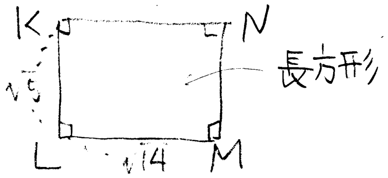
であるから

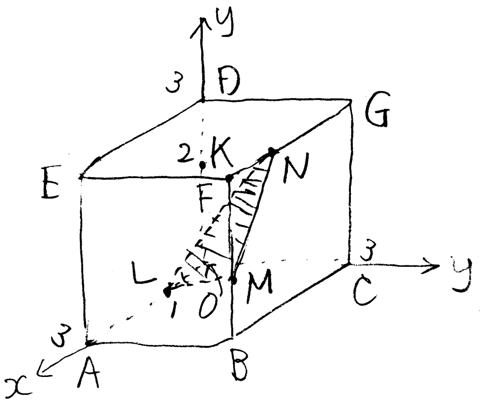
$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=(-1,0,2)\cdot(2,3,1)$

$=-1\cdot2+0\cdot3+2\cdot1=\underline{0}$ $\boxed{ケ}$ $\Leftrightarrow \angle KLM=90^\circ$

$|\overrightarrow{LK}|=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\underline{\sqrt{5}}$ $\boxed{コ}$

$|\overrightarrow{LM}|=\sqrt{2^2+3^2+1^2}=\underline{\sqrt{14}}$ $\boxed{サシ}$





四角形KLMNの面積は

$\sqrt{5}\times\sqrt{14}=\underline{\sqrt{70}}$ $\boxed{スセ}$

(2) $\overrightarrow{OP}=(p,q,r)$，

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{LK}$，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{LM}$ だから

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}=\underline{0}$ $\boxed{ソ}$

よって，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LK}=(p,q,r)\cdot(-1,0,2)=0$

$-p+2r=0\cdots①$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{LM}=(p,q,r)\cdot(2,3,1)=0$

$2p+3q+r=0 \cdots ②$

①,②より

$p=\underline{2r}$ $\boxed{ス}$, $q=\underline{-\frac{5}{3}r}$ $\frac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$

$\overrightarrow{PL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OP}=(1,0,0)-(p,q,r)=(1-p,-q,-r)$

と $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$ より

$(p,q,r)\cdot(1-p,-q,-r)=0$

$\Leftrightarrow p(1-p)-q^2-r^2=0$

$\Leftrightarrow 2r(1-2r)-\left(-\frac{5}{3}r\right)^2-r^2=0$

$\Leftrightarrow 2r-4r^2-\frac{25}{9}r^2-r^2=0$

$\Leftrightarrow 18r-36r^2-25r^2-9r^2=0$

$\Leftrightarrow -70r^2+18r=0$

$\Leftrightarrow 35r^2-9r=0$

$\Leftrightarrow r(35r-9)=0$

$r=0$ とすると $P=O$ となって題意に反する.

よって $r=\underline{\frac{9}{35}}$ $\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}$

従って,

$|\overrightarrow{OP}|^2=p^2+q^2+r^2=(2r)^2+\left(-\frac{5}{3}r\right)^2+r^2$

$=4r^2+\frac{25}{9}r^2+r^2$

$=\frac{70}{9}r^2=\frac{70}{9}\cdot\left(\frac{9}{35}\right)^2$

よって, $|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{\frac{70}{9}\left(\frac{9}{35}\right)^2}=\frac{\sqrt{70}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{35}=\underline{\frac{3\sqrt{70}}{35}}$ $\frac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネノ}}}{\boxed{ハヒ}}$

$\triangle LMN=\frac{1}{2}(\text{長方形}KLMN)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{70}$ であるから

三角錐 OLMN の体積は

$\frac{1}{3}\cdot\triangle LMN\cdot OP=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{70}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{70}}{35}=\underline{1}$ $\boxed{フ}$