2015年センター試験　本試験

数学I・数学A

第1問

［1］

(1) $ab=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\dfrac{1^2-(\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{1-3}{1-2}=\dfrac{-2}{-1}=\underline{2}$ $\boxed{ア}$

$a+b=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})+(1-\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{6})}{1^2-(\sqrt{2})^2}$

$=-(2-2\sqrt{6})=\underline{2(-1+\sqrt{6})}$

$\boxed{イ}$, $\boxed{ウエ}$, $\boxed{オ}$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=\{2(-1+\sqrt{6})\}^2-2\cdot 2$

$=4(7-2\sqrt{6})-4$

$=24-8\sqrt{6}=\underline{8(3-\sqrt{6})}$

$\boxed{カ}$, $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$

(2) $ab=2$ と

$a^2+b^2+4(a+b)=8(3-\sqrt{6})+4\cdot 2(-1+\sqrt{6})$

$=\underline{16}$ $\boxed{ケコ}$

から，$b=\dfrac{2}{a}$ を用いて

$a^2+\left(\dfrac{2}{a}\right)^2+4\left(a+\dfrac{2}{a}\right)=16$

$$a^2+\frac{4}{a^2}+4a+\frac{8}{a}=16$$

$(\times a^2)$ $a^4+4+4a^3+8a=16a^2$

よって $a^4+\underline{4}a^3-\underline{16}a^2+\underline{8}a+\underline{4}=0$

$\boxed{サ}$ $\boxed{シス}$ $\boxed{セ}$ $\boxed{ソ}$

[2] $5<\sqrt{n}<6$ より $25<n<36$

よって $n=26, 27, \cdots, 35$

$U=\{n \mid 26, 27, \cdots, 35\}$

$P=\{n \mid 28, 32\}$

$Q=\{n \mid 30, 35\}$

$R=\{n \mid 30\}$

$S=\{n \mid 28, 35\}$

(1) $n(U)=35-26+1=\underline{10}$ $\boxed{タチ}$

(2) $P\cap R=\phi$, $P\cap S=\{28\}$, $Q\cap R=\{30\}$,

$\overline{Q}=\{26, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 34\}$ より

$P\cap\overline{Q}=\{28, 32\}$, $R\cap\overline{Q}=\phi$

よって 空集合であるものは

$\underline{⓪}$ $P\cap R$, $\underline{④}$ $R\cap\overline{Q}$

$\boxed{ツ}$ $\boxed{テ}$

(3) $P\cup R=\{28, 30, 32\}$ より $P\cup R\not\subset Q$

$S\cap\overline{Q}=\{28\}$ より $S\cap\overline{Q}\subset P$ $\underline{①}$ $\boxed{ト}$

$\overline{Q}\cap\overline{S}=\overline{Q\cup S}=\{26, 27, 29, 31, 32, 33, 34\}$

よって, $\overline{Q\cup S}\not\subset\overline{P}$

$\overline{P}\cup\overline{Q}=\overline{P\cap Q}=U$ よって, $\overline{P\cap Q}\not\subset\overline{S}$

$\overline{R}\cap\overline{S}=\overline{R\cup S}=\{26, 27, 29, 31, 32, 33, 34\}$

であるから $\overline{R\cup S}\subset Q$　④　$\boxed{ナ}$

第2問

$G: y=x^2+2ax+3a^2-6a-36 \cdots ①$

$\quad =(x+a)^2+2a^2-6a-36$

頂点の座標は

$\quad (\underbrace{-a}_{\boxed{ア}},\ \underbrace{2a^2-6a-36}_{\boxed{エ}\ \boxed{イ}\ \boxed{ウ}\ \boxed{エオ}})$

また，$p=3a^2-6a-36$

(1) $p=-27$ のとき $3a^2-6a-36=-27$

$3a^2-6a-9=0$

$a^2-2a-3=(a+1)(a-3)=0$

$a=\underbrace{3}_{\boxed{カ}},\ \underbrace{-1}_{\boxed{キク}}$

$a=3$ のとき G の頂点は $(-3, -36)$

$a=-1$ のとき G の頂点は $(1, -28)$

よって，x 軸方向に $1-(-3)=\underline{4}$ $\boxed{ケ}$，

y 軸方向に $-28-(-36)=\underline{8}$ $\boxed{コ}$

だけ平行移動すればよい．

(2) G が x 軸と共有点を持つとき，頂点の y 座標 $\leqq 0$

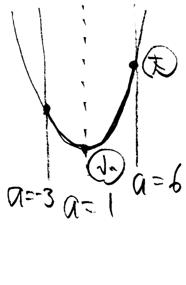
であるから

$2a^2-6a-36<0 \Leftrightarrow a^2-3a-18=(a+3)(a-6)\leqq 0$

$\Leftrightarrow \underline{-3\leqq a\leqq 6}$　$\boxed{サシ}$, $\boxed{ス}$, $\boxed{セ}$, $\boxed{ソ}$

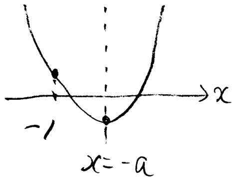
$p=3(a^2-2a)-36=3(a-1)^2-39$

$\underbrace{a=1}_{\boxed{タ}}$ で最小値 $\underbrace{-39}_{\boxed{チツテ}}$



$a=6$ で 最大値 $3\cdot5^2-39=36$

$\boxed{ト}$ $\boxed{ナニ}$



頂点のy座標≦0より

$-3\leqq a\leqq 6$ …②

軸の位置について

$-a>-1$

$\Leftrightarrow\ a<1$ …③

$x=-1$ のとき y座標>0より

$(-1)^2+2a\cdot(-1)+3a^2-6a-36>0$

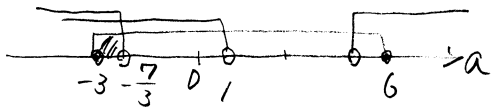
$\Leftrightarrow\ 3a^2-8a-35>0$

$\Leftrightarrow\ (a-5)(3a+7)>0$

$\Leftrightarrow\ a<-\frac{7}{3},\ 5<a$ …④

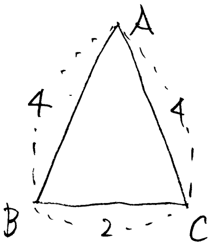
$\begin{array}{ccc} 1 & -5 & \to -15 \\ 3 & 7 & \to 7 \\ \hline & & -8 \end{array}$

②,③,④より



$-3\leqq a<-\frac{7}{3}$ $\boxed{ヌネ}$, $\boxed{ノ}$, $\boxed{ハ}$, $\frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$

第3問



余弦定理により

$AC^2=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cos\angle ABC$

$=16+4-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{4}$

$=16$

$AC>0$ より $AC=4$ $\boxed{ア}$

$\cos\angle BAC=\frac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot4\cdot4}=\frac{\cancel{28}\,7}{2\cdot\cancel{4}\cdot4}=\frac{7}{8}$ $\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$

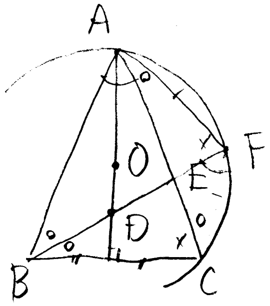
$\sin\angle BAC>0$ より

$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{8}$ $\frac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$

外接円の半径をRとすると，正弦定理により

$$\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2R \Leftrightarrow \frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{8}}=2R$$

よって $R=\frac{8}{\sqrt{15}}=\underline{\frac{8\sqrt{15}}{15}}$ $\frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{クケ}}}{\boxed{コサ}}$



(1) AE：EC＝AB：BCより

$AE:EC=4:2=2:1$

よって $AE=\frac{2}{2+1}\cdot AC=\underline{\frac{8}{3}}$ $\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$

△ABEで余弦定理を用いると

$$BE^2=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cos\angle BAC$$

$$=16+\frac{64}{9}-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}$$

$$=16+\frac{64}{9}-\frac{56}{3}=\frac{40}{9}$$ ⇐ $8\left(2+\frac{8}{9}-\frac{7}{3}\right)$と8でくくってから計算

$BE>0$

$BE=\underline{\frac{2\sqrt{10}}{3}}$ $\frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チ}}$

$\angle BAD=\angle EAD$より $BD:DE=AB:AE$

よって $BD:DE=4:\frac{8}{3}=3:2$

したがって

$$BD=\frac{3}{3+2}BE=\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{3}=\underline{\frac{2\sqrt{10}}{5}}$$ $\frac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナ}}$

(2) △EBC∽△EAF（2角相等）だから

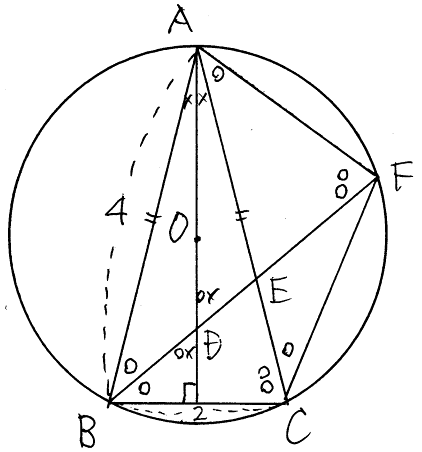
$$\triangle EBC:\triangle EAF=BE^2:AE^2$$

$$=\frac{40}{9}:\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{40}{9}:\frac{64}{9}=5:8$$

よって, $\triangle EBC = \frac{5}{8}\triangle EAF$ $\frac{\boxed{ミ}}{\boxed{ム}}$

(3) 図で, $\angle ABF = \angle ACF$ (円周角) だから

$FA = FC$



$\frac{1}{2}\angle ABC = x$, $\frac{1}{2}\angle BAC = y$ とすると

$\angle FAD = x + y$, $\angle ADF = x + y$

よって $FA = FD$

以上から $FA = FC = FD$ ④

※ 試験中は, 正確な図をかくのがむずかしい. $BC : AF = BE : AE$ などから, 直接長さを求める手もある.

第4問

(1) 3の移動を2回, 4の移動を2回行なうので, 3, 3, 4, 4 の順列の個数を求めればよい. それは

$${}_4C_2 = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6 \text{ 通り } \boxed{ア}$$

(2) 3, 4, 5の矢印の方向の移動をそれぞれ1回ずつ行うので $3! = 6$ 通り $\boxed{イ}$

(3) $A \xrightarrow[\text{3回の移動}]{} C \xrightarrow[\text{3回の移動}]{} D$ となるのは

$$6 \times 6 = 36 \text{ 通り } \boxed{ウエ}$$

確率は $\frac{36}{6^6} = \frac{1}{6^4} = \frac{1}{1296}$ $\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキクケ}}$

(4) ・1の矢印の向きの移動を含むもの.

Dから離れるので戻るのに 4の矢印の向きに戻るか.

3と5の矢印の向きに戻るかのどちらか.
1,3,5の矢印の向きに進むと,残り3回で
Dにたどり着くことができない.

よって,1,4の矢印の方向に進み,残り4回
でDに着かねばならない.よって,4の矢印
の向きの移動を4回行う.1,4,4,4,4,4
の順列の個数だから 6通り. コ

・2の矢印の向きの移動を含むもの

2回以上行うとDにたどり着くのは不可能.
よって,2の矢印の向きの移動は1回のみ.

5の矢印の向きの移動を1回行なわなければ
ならない.残りは4の矢印の向きの移動を
4回行うので, 2,5,4,4,4,4 の順
列とみて, $\frac{6!}{4!}=6\cdot5=30$通り サシ

・6の矢印の向きの移動を含むものは,図形
の対称性から,サシと等く 30通り

・上記3つ以外の場合, 3,5の矢印の向きの
移動をそれぞれ2回行う必要がある.この
とき4の矢印の向きの移動は2回 ス
だけに決まる.
3,3,5,5,4,4の順列とみて,

$$\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{2\cdot1\cdot2\cdot1}=90\text{通り}$$ セソ

よって,題意の移動の仕方は 6+30+30+90
=156通りある. タチツ