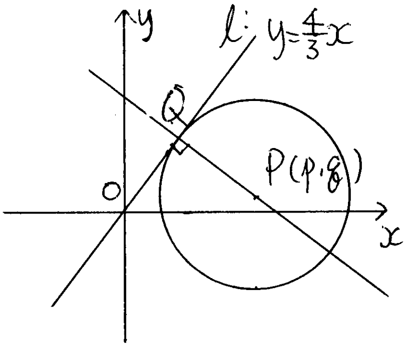
数学Ⅱ・数学B

第1問



[1]

(1) 点Pを通り直線ℓに垂直な直線は傾き$-\frac{3}{4}$だから、その方程式は

$$y=-\frac{3}{4}(x-p)+q \quad \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$ （… mとする）

ℓとmの交点のx座標は

$$\frac{4}{3}x=-\frac{3}{4}(x-p)+q$$

$$\Leftrightarrow 16x=-9(x-p)+12q$$

$$\Leftrightarrow 25x=9p+12q$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{9p+12q}{25}=\frac{3}{25}(3p+4q) \quad \boxed{ウ}, \boxed{エ}$$

よって、y座標は（$y=\frac{4}{3}x$に代入して）

$$y=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{25}(3p+4q)=\frac{4}{25}(3p+4q)$$

従って、

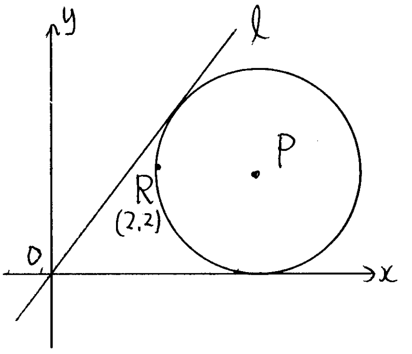
$$r=PQ=\sqrt{\left\{\frac{3}{25}(3p+4q)-p\right\}^2+\left\{\frac{4}{25}(3p+4q)-q\right\}^2}$$

［これを計算すると手間がかかるので、
点と直線の距離の公式を使う。］

P(p, q)　　$4x-3y=0$

$$=\frac{|4p-3q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{1}{5}|4p-3q| \quad \boxed{オ}, \boxed{カ} \quad \cdots ①$$

(2)



条件より，$p>0, q>0$ である．

また，C が x 軸に接するから $r=q$

よって，①により

$$q=\frac{1}{5}|4p-3q|$$

$$\Leftrightarrow |4p-3q|=5q$$

$$\Leftrightarrow 4p-3q=\pm 5q$$

$$\Leftrightarrow 4p=3q\pm 5q=8q,\ -2q$$

p, q はともに正だから

$$4p \neq -2q$$

$$\therefore 4p=8q \Leftrightarrow p=2q \text{ 答}$$

C の方程式は

$$(x-2q)^2+(y-q)^2=q^2$$

とおけて，点 R(2,2) を通るから

$$(2-2q)^2+(2-q)^2=q^2$$

$$\therefore q^2-3q+2=0$$

$$\therefore (q-1)(q-2)=0$$

$$\therefore q=1,\ 2$$

4 -8 4
1 -4 4
-1
4) 4 -12 8
1 -3 2

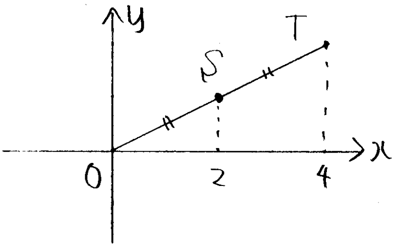
よって，Cの方程式は

$(x-\underline{2})^2+(y-\underline{1})^2=\underline{1}$　$\boxed{ク}, \boxed{ケ}, \boxed{コ}$ …②

または

$(x-\underline{4})^2+(y-\underline{2})^2=\underline{4}$　$\boxed{サ}, \boxed{シ}, \boxed{ス}$ …③

(3)　S(2,1), T(4,2)より



点Oは線分STを$\underline{1:2に外分する}$.

$\boxed{セ}$ ④

[2]

$\log_2 m^3+\log_3 n^2 \leqq 3$ ……④

$m=2, n=1$のとき

$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 2^3+(\log_3 1)^2=\underline{3}$ $\boxed{ソ}$

$m=4, n=3$のとき

$\log_2 m^3+\log_3 n^2=\log_2 4^3+\log_3 3^2$

$=\log_2 (2^2)^3+2=\log_2 2^6+2=6+2=\underline{8}$ $\boxed{タ}$

④を変形すると

$3\log_2 m+2\log_3 n \leqq 3$

$\therefore \log_2 m+\underline{\frac{2}{3}}\log_3 n \leqq \underline{1}$　$\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}, \boxed{テ}$ …⑤

nが自然数のとき，底$3>1$より

$\log_3 n \geqq \log_3 1 = 0$

$\log_3 n$のとり得る最小の値は 0 $\boxed{\text{ト}}$

よって，$\log_2 m \leqq 1$

これより $m = 1$ $\boxed{\text{ナ}}$ または $m = 2$ $\boxed{\text{ニ}}$

$m=1$のとき，⑤は $\log_3 n \leqq \dfrac{3}{2}$ $\boxed{\text{ヌ}}$ $\boxed{\text{ネ}}$ となり

底$3>1$より　$n \leqq 3^{\frac{3}{2}}$

両辺とも正だから，両辺を2乗して

$n^2 \leqq 3^3 = 27$ $\boxed{\text{ノハ}}$

よって，自然数nのとり得る値の範囲は

$1 \leqq n \leqq 5$ $\boxed{\text{ヒ}}$

従って，$m=1$のとき④を満たす自然数m, nの組の個数は5である.

（同様にして，）$m=2$のとき⑤より

$\log_2 2 + \frac{2}{3}\log_3 n^2 \leqq 1$

$1 + \frac{2}{3}\log_3 n^2 \leqq 1$

$\log_3 n^2 \leqq 0$

底$3>1$だから

$n^2 \leqq 3^0 = 1$

これを満たす自然数nは1のみ.

よって，$m=2$ のとき ④を満たす自然数 m, n の組の個数は $\underline{1}$ である．$\boxed{フ}$

以上から，④を満たす自然数 m, n の組の個数は

$$5+1=\underline{6} \quad \boxed{ヘ}$$

である。

$\boxed{第2問}$ (30点)

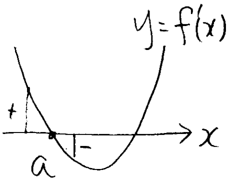
$f(x)=x^3-px$ (pは実数) とする．

(1) $f'(x)=\underline{3x^2}-p$ $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$

$f(x)$ が $x=a$ で極値をとるなら

$$f'(a)=3a^2-p=\underline{0} \quad \boxed{ウ}$$

が成り立つ。



$f'(x)=3x^2-p=0$ が異なる2つの実数解をもてばよい。

$$x^2=\frac{1}{3}p$$

より，$\underline{p>0}$ が必要十分である．

$\boxed{エ}$ ①

(2) $f(x)$ が $x=\frac{p}{3}$ で極値をとるとすると

$$f'\left(\frac{p}{3}\right)=3\left(\frac{p}{3}\right)^2-p=0$$

$p^2-3p=p(p-3)=0$

$p>0$ より $\underline{p=3}$ $\boxed{オ}$

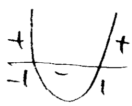
よって,

$f(x)=x^3-3x$,

$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x+1)(x-1)$

x	…	-1	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



よって, $f(x)$ は $\underline{x=-1}$ で極大値をとり,

$\underline{x=1}$ で極小値をとる. $\boxed{カキ}$, $\boxed{ク}$

C上の点 $(t, f(t))$ で引いた接線の方程式は

$y=(\underline{3}t^2\underline{-3})(x-t)+(t^3-3t)$

$\boxed{ケ}$ $\boxed{コ}$

点A$(1,-2)$ を通るから

$-2=(3t^2-3)(1-t)+(t^3-3t)$

$-2=-3t^3+3t^2+3t-3+t^3-3t$

$\underline{2}t^3\underline{-3}t^2+1=0$ $\boxed{サ}$, $\boxed{シ}$

$(t-1)^2(2t+1)=0$

$\therefore\ t=\underline{1}, \underline{\dfrac{-1}{2}}$ $\boxed{ス}$, $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タ}}$

-3 3 3 -3

1 -3

-2 3 0 -3

2

-2 3 0 -1

1	2	-3	0	1
		2	-1	-1
1	2	-1	-1	0
		2	1	
	2	1	0	

ここで，$t=1$ とすると $f'(1)=0$ となって

l の傾きが 0 でないという条件に反する.

よって，$t=-\frac{1}{2}$

従って，l の方程式は

$$y=\left\{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-3\right\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{3}{4}-3\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{9}{4}x-\frac{9}{8}-\frac{1}{8}+\frac{3}{2}$$

$$\therefore\ y=\underline{\frac{-9}{4}}x+\underline{\frac{1}{4}} \qquad \frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}},\ \frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}}$$

D の方程式を $y=a(x-1)^2-2$ とおく。

原点を通るから $0=a\cdot(-1)^2-2 \Leftrightarrow a=2$

よって，D の方程式は

$$y=2(x-1)^2-2$$

$$\Leftrightarrow\ y=\underline{2}x^2-\underline{4}x \qquad \boxed{ニ},\boxed{ヌ}$$

l と D の交点の x 座標は

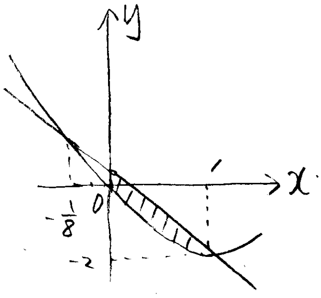
$$2x^2-4x=-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ 8x^2-16x=-9x+1$$

$$\Leftrightarrow\ 8x^2-7x-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ (x-1)(8x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow\ x=1,\ -\frac{1}{8}$$



図より

$$S=\int_0^1\left\{\left(-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}\right)-(2x^2-4x)\right\}dx$$

$$=\int_0^1\left(-2x^2+\frac{7}{4}x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{1}{4}x\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{3}+\frac{7}{8}+\frac{1}{4}=-\frac{16}{24}+\frac{21}{24}+\frac{6}{24}$$

$$=\underline{\frac{11}{24}}\quad \boxed{ネノ}$$

第3問

$a_1=6,\ a_{n+1}-a_n=9+(n-1)4=4n+5$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \cdots$

$+9 \quad +13 \quad +17 \quad \cdots$

$+4 \quad +4$

(1) $a_2=a_1+9=\underline{15}$ $\boxed{アイ}$

$a_3=a_2+13=\underline{28}$ $\boxed{ウエ}$

$\{a_n\}$の階差数列の第n項は $\underline{4n+5}$ $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$

だから

$n\geqq 2$のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=6+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+5)$$

$= 6 + 4 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + 5(n-1)$

$= 2n^2 + 3n + 1$

($n=1$のときも成り立つ.)

よって,

$a_n = \underline{2n^2 + 3n + 1}$ $\boxed{キ}, \boxed{ク}, \boxed{ケ}, \boxed{コ}$ $\cdots$ ①

(2)

$b_{n+1} = \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} b_n$ $\cdots\cdots$ ②

$b_2 = \frac{a_1}{a_2 - 1} b_1 = \frac{6}{15-1} \cdot \frac{2}{5}$

$= \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\frac{6}{35}}$ $\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シス}}$

①, ②より

$b_{n+1} = \frac{2n^2 + 3n + 1}{\{2(n+1)^2 + 3(n+1) + 1\} - 1} b_n$

$= \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 7n + 5} b_n$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{(n+1)(2n+5)} b_n$

$= \underline{\frac{2n+1}{2n+5} b_n}$ $\boxed{セ}, \boxed{ソ}, \boxed{タ}$ $\cdots$ ③

ここで, $c_n = (2n+1) b_n$ とすると

$c_{n+1} = (2n+3) b_{n+1}$

よって, ③より

$\frac{c_{n+1}}{2n+3} = \frac{c_n}{2n+5}$

$\therefore (2n+\underline{5})c_{n+1} = (2n+\underline{3})c_n$

$\boxed{チ}$ $\boxed{ツ}$

$d_n = (2n+\underline{3})c_n$ とおくと $\boxed{テ}$ …⑤

$d_{n+1} = (2n+5)c_{n+1}$ だから

よって，$d_{n+1} = d_n$

$d_1 = (2\cdot 1+3)c_1 = 5c_1 = 5\cdot 3b_1$

$= 5\cdot 3\cdot \frac{2}{5} = \underline{6}$ $\boxed{ト}$

であるから，$d_n = 6$

n のかわりに $n+1$ とすると，

$2n+3$ は

$2(n+1)+3 = 2n+2+3 = 2n+5$

になる.

従って，④，⑤より

$c_n = \frac{6}{2n+3} = (2n+1)b_n$

よって，$b_n = \frac{3\times 2}{(2n+1)(2n+3)}$

$$\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} = \frac{(2n+3)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2}{(2n+1)(2n+3)}\right]$$

$= 3\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}$

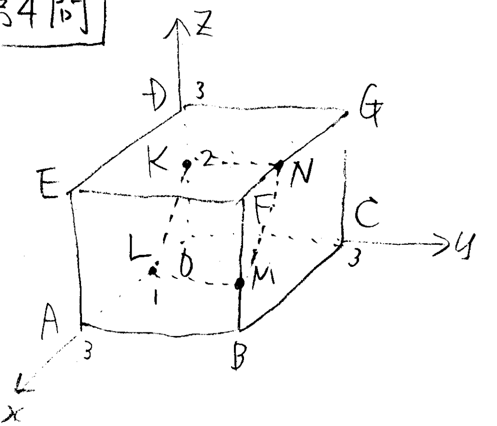
⇦ 2/3まで $\frac{6}{2n+1} - \frac{6}{2n+3}$ としておりました。これは間違いで左の通り $\frac{3}{2n+1} - \frac{3}{2n+3}$ が正解です。お詫びして訂正いたします。（外賀）

ゆえに

$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2k+1} - \frac{3}{2k+3}\right)$

$= 1 - \frac{3}{2n+3} = \underline{\frac{2n}{2n+3}}$ $\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ},\boxed{ノ}}$

第4問



$\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OL}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ より

$\overrightarrow{LK}=\underline{(-1,0,2)}$ $\boxed{アイ}$, $\boxed{ウ}$, $\boxed{エ}$

四角形KLMNが平行四辺形であるから

$\overrightarrow{LK}=\underline{\overrightarrow{MN}}$ $\boxed{オ}$ ③

$\overrightarrow{OM}=(3,3,s)$, $\overrightarrow{ON}=(t,3,3)$ とすると

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}t\\3\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\3\\s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t-3\\0\\3-s\end{pmatrix}$

よって, $\overrightarrow{MN}=(t-3,0,3-s)$

これが $\overrightarrow{LK}$ と等しいので

$t-3=-1$, $3-s=2$

$\therefore s=\underline{1}$, $t=\underline{2}$
$\boxed{カ}$ $\boxed{キ}$

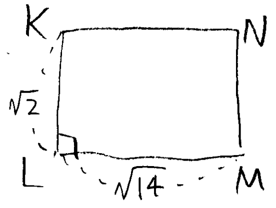
$N(2,3,3)$ だから, NはFGを $1:\underline{2}$ に内分する。 $\boxed{ク}$

$\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OL}=\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$ より

$\overrightarrow{LK}\cdot\overrightarrow{LM}=(-1,0,2)\cdot(2,3,1)=-1\cdot2+0\cdot3+2\cdot1=\underline{0}$ $\boxed{ケ}$ …①

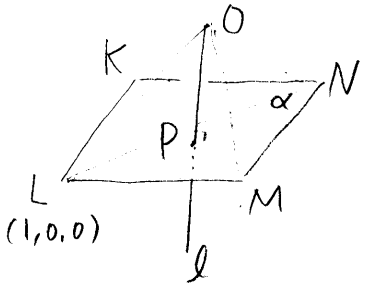
$|\overrightarrow{LK}| = \sqrt{(-1)^2+0^2+2^2} = \sqrt{5}$ $\boxed{コ}$

$|\overrightarrow{LM}| = \sqrt{2^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$ $\boxed{サシ}$



①より $\angle KLM = 90^\circ$. よって, 四角形KLMNは長方形であるから, その面積は

$$\sqrt{5} \times \sqrt{14} = \sqrt{70} \quad \boxed{スセ}$$



$\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{LM}$ より

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LK} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{LM} = 0$ $\boxed{ツ}$

$\therefore (p, q, r) \cdot (-1, 0, 2) = 0$

$(p, q, r) \cdot (2, 3, 1) = 0$

より,
$$\begin{cases} -p + 2r = 0 \quad \cdots\cdots ② \\ 2p + 3q + r = 0 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

よって, ②より

$$p = 2r \quad \boxed{タ}$$

③より

$2\cdot 2r+3q+r=0$

$\therefore q=\frac{-5}{3}r$ $\frac{\boxed{チツ}}{\boxed{テ}}$

また，$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{PL}$より

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PL}=0$

$\therefore \overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OP})=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OL}-|\overrightarrow{OP}|^2=0$

$\therefore (p,q,r)\cdot(1,0,0)-(p^2+q^2+r^2)=0$

$\Leftrightarrow p-(p^2+q^2+r^2)=0$

$\Leftrightarrow 2r-\{(2r)^2+\left(-\frac{5}{3}r\right)^2+r^2\}=0$ ……④

$r=0$とすると$P(0,0,0)$となって題意に合わない．

よって，④の両辺をrで割って

$2-\left(4r+\frac{25}{9}r+r\right)=0$

$\therefore 18-70r=0$

$\therefore r=\frac{9}{35}$ $\frac{\boxed{ト}}{\boxed{ナニ}}$

$\therefore |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{p^2+q^2+r^2}=\sqrt{\frac{70}{9}r^2}=\frac{\sqrt{70}}{3}r$ $(\because r>0)$

$=\frac{\sqrt{70}}{3}\cdot\frac{9}{35}=\frac{3\sqrt{70}}{35}$ $\frac{\boxed{ヌ}\sqrt{\boxed{ネノ}}}{\boxed{ハヒ}}$

三角錐OLMNの体積は

$\frac{1}{3}\times\triangle LMN\times OP$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{70}\times\frac{3\sqrt{70}}{35}=1$ $\boxed{フ}$

（以上）