数学I・数学A

第1問（配点 20）

〔1〕

(1) $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}$ より

$$ab=\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\frac{1^2-(\sqrt{3})^2}{1^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1-3}{1-2}=\frac{-2}{-1}=\underline{2}\ \boxed{ア}$$

$$a+b=\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}+\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6})+(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6})}{1^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{6}}{1-2}=\frac{2-2\sqrt{6}}{-1}=-2+2\sqrt{6}$$

$$=\underline{2}(\underline{-1}+\underline{\sqrt{6}})\ \boxed{イ},\boxed{ウエ},\boxed{オ}$$

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

$$=\{2(-1+\sqrt{6})\}^2-2\cdot2=4(1-2\sqrt{6}+6)-4$$

$$=4(7-2\sqrt{6})-4=24-8\sqrt{6}$$

$$=\underline{8}(\underline{3}-\underline{\sqrt{6}})\ \boxed{カ},\boxed{キ},\boxed{ク}$$

(2) $a^2+b^2+4(a+b)=8(3-\sqrt{6})+4\cdot2(-1+\sqrt{6})$

$$=24-8\sqrt{6}-8+8\sqrt{6}=\underline{16}\ \boxed{ケコ}$$

と $ab=2 \iff b=\dfrac{2}{a}$ から

$$a^2+\left(\frac{2}{a}\right)^2+4\left(a+\frac{2}{a}\right)=16$$

$$a^2+\frac{4}{a^2}+4a+\frac{8}{a}=16$$

両辺にa^2をかけて

$a^4+4+4a^3+8a=16a^2$

$a^4+\underline{4}a^3\underline{-16}a^2+\underline{8}a+\underline{4}=0$

$\boxed{サ}$ $\boxed{シス}$ $\boxed{セ}$ $\boxed{ソ}$

〔2〕 $U=\{26,27,28,\cdots,33,34,35\}$

$P=\{28,32\}$, $Q=\{30,35\}$, $R=\{30\}$

$S=\{28,35\}$

(1) $n(U)=35-26+1=\underline{10}$ $\boxed{タチ}$ (個)

(2) $\underline{P\cap R=\emptyset}$ $\boxed{ツ}$ ⓪, $P\cap S=\{28\}$, $Q\cap R=\{30\}$,

$P\cap\overline{Q}=\{28,32\}$, $\underline{R\cap\overline{Q}=\emptyset}$ $\boxed{テ}$ ④

(3) $P\cup R=\{28,30,32\}\not\subset\overline{Q}$

$(30\notin\overline{Q})$

$S\cap\overline{Q}=\{28\}\subset P$ よって, $\underline{S\cap\overline{Q}\subset P}$ $\boxed{ト}$ ①

$(28\in P)$

$\overline{Q}\cap\overline{S}\subset\overline{P}$ が成り立つとき

$P\subset Q\cup S$ が成り立つ.

$Q\cup S=\{28,30,35\}$ だから

$P\not\subset Q\cup S$

よって, $\overline{Q}\cap\overline{S}\not\subset\overline{P}$

$\overline{P}\cup\overline{Q}\subset\overline{S}$ が成り立つとき

$S\subset P\cap Q$ が成り立つ.

$P\cap Q=\emptyset$ だから

$S\subset P\cap Q$ は成り立たない.

$\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$ が成り立つとき

$Q\subset R\cup S$ が成り立つ.

$R\cup S=\{28, 30, 35\}$ だから

$Q\subset R\cup S$ が成り立ち,

$\overline{R}\cap\overline{S}\subset\overline{Q}$ も成り立つ. ナ ④

第2問

$G: y=x^2+2ax+3a^2-6a-36$

$\quad =(x+a)^2+2a^2-6a-36$

頂点の座標は

$(-a, 2a^2-6a-36)$

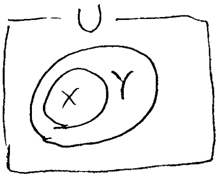
ア, イ, ウ, エオ

$p=3a^2-6a-36$

(1) $p=-27$ のとき　$3a^2-6a-36=-27$

両辺を3で割って

$X\subset Y$ のとき



$\overline{X}\supset\overline{Y}$ は明らかに成り立つ.

訂正 2/3まで, ③について「$S\subset P\cup Q$ が成り立つ」としておりました。左の通り「$S\subset P\cap Q$ が成り立つ」が正解です.

また, ④についても「$Q\subset R\cap S$ が成り立つ」としておりましたが, 左の通り「$Q\subset R\cup S$ が成り立つ」が正解です。慎んでお詫びいたします。(外賀)

$a^2-2a-3=0$

$\therefore (a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=\underline{3},\ \underline{-1}$

$\boxed{カ}$ $\boxed{キク}$

$a=3$ のとき G の頂点の座標は

$(-3,\ -36)$

$a=-1$ のとき G の頂点の座標は

$(1,\ -28)$

よって，x 軸方向に $1-(-3)=\underline{4}$，$\boxed{ケ}$

y 軸方向に $-28-(-36)=\underline{8}$ $\boxed{コ}$

だけ平行移動する．

G が x 軸と共有点をもつとき，G の頂点の y 座標は

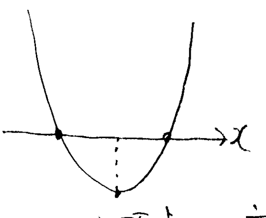
負か 0 である．

$\therefore 2a^2-6a-36 \leqq 0$

$\Leftrightarrow a^2-3a-18 \leqq 0$

$\Leftrightarrow (a-6)(a+3) \leqq 0$

$\Leftrightarrow \underline{-3 \leqq a \leqq 6}$ $\boxed{サシ}$ $\boxed{ス}$，$\boxed{セ}$ $\boxed{ソ}$

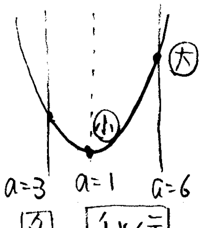


(頂点の y 座標) < 0

このとき

$p=3a^2-6a-36$

$\quad =3(a-1)^2-39$



よって，p は $\underline{a=1}$ で最小値 $\underline{-39}$ をとり，$\boxed{タ}$，$\boxed{チツテ}$

$a=\underline{6}$ で最大値 $3\cdot5^2-39=\underline{36}$ をとる.

$\boxed{ト}$ $\boxed{ナニ}$

次に, Gとx軸との共有点のx座標がすべて-1より大きいとき,

(頂点のy座標)$\leqq0$ より $-3\leqq a\leqq6$ …①

⇐「異なる2点で交わる」とは書いてないので,「接する」場合も考える.

軸の位置について $-a>-1 \Leftrightarrow a<1$ …②

$x=-1$ のときのy座標は正だから

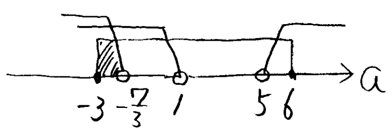
$(-1)^2+2a\cdot(-1)+3a^2-6a-36>0$

$\therefore 3a^2-8a-35=(3a+7)(a-5)>0$

⇐ 解答の□から見て因数分解できるはずと考えること.

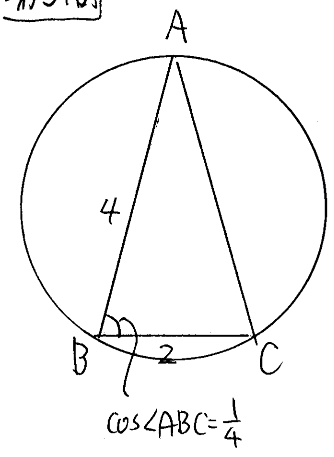
$\therefore a<-\frac{7}{3},\ 5<a$ …③

①,②,③より



$\underline{-3\leqq a<-\frac{7}{3}}$ $\boxed{ヌネ}$, $\boxed{ノ}$, $\boxed{ハ}$, $\frac{\boxed{ヒフ}}{\boxed{ヘ}}$

$\boxed{第3問}$



△ABCで余弦定理を用いて

$CA^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle ABC$

$=4^2+2^2-2\cdot4\cdot2\cdot\frac{1}{4}$

$=16+4-4=16$

$CA>0$ だから

$CA=\underline{4}$ $\boxed{ア}$

また, $\cos\angle BAC=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$$= \frac{4^2+4^2-2^2}{2\cdot4\cdot4} = \frac{28}{2\cdot4\cdot4} = \frac{7}{8} \quad \frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$$

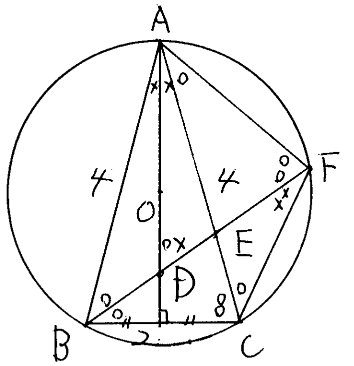
$$\therefore \sin\angle BAC = \sqrt{1-\cos^2\angle BAC}$$
$$= \sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{(8+7)(8-1)}{8^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{8} \quad \frac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$$

外接円の半径をRとすると、正弦定理により

$$2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{2}{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

$$\therefore BC = \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{15}}{15} \quad \frac{\boxed{キ}\sqrt{\boxed{クサ}}}{\boxed{コサ}}$$

(1)



∠ABE=∠CBEより

$$AE:EC = AB:BC = 4:2 = 2:1$$
$$\therefore AE = \frac{2}{2+1}AC = \frac{2}{3}\cdot4 = \frac{8}{3} \quad \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$$

△ABEに余弦定理を用いると

$$BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2\cdot AB\cdot AE\cdot\cos\angle BAE$$
$$= 4^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{8}$$

$=16+\dfrac{64}{9}-\dfrac{56}{3}$

$=16+7\dfrac{1}{9}-18\dfrac{2}{3}$

$=5-\dfrac{5}{9}=\dfrac{40}{9}$

BE>0だから

$BE=\underline{\dfrac{2\sqrt{10}}{3}}$ $\dfrac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソタ}}}{\boxed{チ}}$

∠BAD=∠DAEだから

BD : DE=AB : AE

$=4:\dfrac{8}{3}=3:2$

よって,

$BD=\dfrac{3}{3+2}BE=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{3}=\underline{\dfrac{2\sqrt{10}}{5}}$ $\dfrac{\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}}{\boxed{ナ}}$

(2) △EBC∽△EAF(2角相等)より

相似比は

$EB:EA=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}:\dfrac{8}{3}=\sqrt{10}:4$

よって,面積比は相似比の2乗に等しいから

$(\sqrt{10})^2:4^2=10:16=5:8$

よって,△EBCの面積は△EAFの$\underline{\dfrac{5}{8}}$倍 $\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$

である。

(3) ∠FAD=∠FDAより△FADはFA=FD

の二等辺三角形である。

また,∠FAC=∠FCAであるから△FACは

FA=FCの二等辺三角形である

よって,<u>FA=FC=FD</u> ④ $\boxed{ネ}$

$\boxed{\text{第4問}}$

(1) $\underset{3}{\swarrow}\ \underset{3}{\swarrow}\ \underset{4}{\downarrow}\ \underset{4}{\downarrow}$ の並べ方の総数だから

$${}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=\underline{6}\text{ 通り }\boxed{ア}$$

(2) $\underset{3}{\swarrow}\ \underset{4}{\downarrow}\ \underset{5}{\searrow}$ の並べ方の総数だから

$$3!=\underline{6}\text{ 通り }\boxed{イ}$$

(3) CからDへ3回で移動する方法は
AからCへ3回で移動する方法と
全く同じだから、移動の仕方は

$$\boxed{イ}\times\boxed{イ}=6\times6=\underline{36}\text{ 通り }\boxed{ウエ},$$

その確率は、サイコロを6回投げることから

$$\frac{36}{6^6}=\frac{1}{6^4}=\underline{\frac{1}{1296}}\quad\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カキクケ}}$$

(4) 順に考える.

・$\boxed{コ}$について

$\overset{1}{\uparrow}$ を使うものは、$\overset{1}{\uparrow}$ 1つと $\underset{4}{\downarrow}$ 5つの

順列であるから、その個数は

$$\frac{6!}{5!}=\underline{6}\text{ 通り }\boxed{コ}$$

・$\boxed{サシ}$について

$\overset{2}{\nwarrow}$ は A→D の方向から離れていくので、

$\underset{5}{\searrow}$ を補わなければならない. (これで2回必要)

最短は A→D の直進(4回)だから

${}^{2}\nwarrow\ \ \searrow_{5}\ \ \underset{4}{\downarrow}\ \underset{4}{\downarrow}\ \underset{4}{\downarrow}\ \underset{4}{\downarrow}$ の順列である.

よって,

$$\frac{6!}{4!}=6\cdot5=\underline{30}\text{ 通り }\boxed{サシ}$$

・$\nearrow^{6}$ を含むものは，図形の対称性から ${}^{2}\nwarrow$ を含むものと同じである.

・$\overset{1}{\uparrow}$，${}^{2}\nwarrow$，$\swarrow_{3}$ を含まない場合

${}_{3}\swarrow$ 1つと $\searrow_{5}$ 1つで $\underset{4}{\downarrow}$ 1つ分進むことに相当する。AからDまで直進で矢印4つ分だから，$\underset{3}{\swarrow}$ $\underset{5}{\searrow}$ は2セット，$\underset{4}{\downarrow}$ は2つの組み合わせしかない。

よって，$\underset{4}{\downarrow}$ の矢印の向きの移動は $\underline{2}$ 回だけ $\boxed{ス}$ であり，移動の仕方は $\frac{6!}{2!2!2!}=\frac{{}^{3}\cancel{6}\cdot5\cdot{}^{2}\cancel{4}\cdot3\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{\cancel{2}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot1\cdot\cancel{2}\cdot1}=\underline{90}$ 通りである. $\boxed{セソ}$

以上から，Aから6回移動してDに移る移動の仕方は

$$\boxed{コ}+\boxed{サシ}\times2+\boxed{セソ}=6+30\times2+90$$

$$=\underline{156}\text{ 通り }\boxed{タチツ}$$